கணிதம்-ஓர் அறிமுகம்-III

(புகுமுக வகுப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
ரா. மகாதேவன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—270

கணிதம்-ஓர் அறிமுகம்-III

(புகுமுக வகுப்பிற்குரியது)

ரா. மகாதேவன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—October 1971

T.N.T.B S. (C.P.) No. — 270

MATHEMATICS for P.U.C. (Book-III)

R. MAHADEVAN

Net Price Rs. 2-75
(No discount)

Printed by

Srinivasam Press of Jupiter Enterprises,
1, Smith Lane,
Madras-2.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்,
(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரியமுறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'கணிதம்–ஓர் அறிமுகம்-III' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 270ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 305 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

	பக்கம்
வகை நுண்கணிதம்	
1. வகைக்கெழு விளக்கம்	1
2. வகைக்கெழு காணும் முறை	13
3. வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள்	33
4. தொகை காணல்	66
5. வரையறுக்கப்பட்ட தொகை	79
6. சில வினாத்தாள்கள்	97
கண இயற்கணிதம்	101
கலைச் சொற்கள்	135

வகை நுண் கணிதம்

1. வகைக்கெழு விளக்கம்

(Definition of derivative)

1·1 சரித்திரக் குறிப்பு : சாதாரணக் கணக்கு (arithmetic), இயற்கணிதம் (algebra), கோணகணிதம் (Trigonometry), வரை கணிதம் (geometry) முதலிய கணிதப் பிரிவுகள் ஏறக்குறைய இரண்டாயிரம் ஆண்டுகட்கு முன்னரே தோன்றியவையாகும். நவீன கணிதத்தின் தலைசிறந்த பிரிவான நுண்கணிதத்திற்குச் சுமார் 400 ஆண்டுகட்கு முன்னர் அடிகோலப்பட்டது. இதற்கு வித்திட்ட பெருமை சர் ஐசாக் நியூட்டன் (1642–1727) எனும் ஆங்கிலக் கணித அறிஞரையும், லீப்னிட்சு (Leibnitz) (1646–1716) எனும் ஜெர்மானிய அறிஞரையுமே சாரும்.

1.2 வகை நுண் கணிதம் என்பது யாது ? சாதாரணக் கணக்கில், எண்ணளவை, முகத்தலளவை எனும் பலவித அளவைகளையும், அவற்றைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் முறைகளையும் படிக்கிறோம். அதில் முழு எண்கள், பின்ன எண்கள் முதலியனவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஆனால் இயற்கையில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் மிக மிக நுண்ணிய அளவில் தொடர்ச்சியாக ஏற்பட்டுப் பிறகு கணிசமான அளவுள்ள மாறுதலாகின்றன. 'பலதுளி பெருவெள்ளம்' ஆவது போலத் துளித்துளியாகச் சேருவது கண்ணுக்குப் புலப்படாது ; பெரு வெள்ளம் வருவது தான் தெரியும். நுண்ணிய மாறுதல்களையும், அவை மாறும் வீதங்களையும், நுண்ணிய மாறுதல்கள் தொடர்ந்து ஏற்படுவதால் நிகழும் தொகைகளையும் கணக்கிட்டு ஆராய்வது நுண்கணிதமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கல்லை ஒரு வேகத்துடன் நேர் மேலே எறிந்தால் அதன் வேகம் தொடர்ந்து குறைந்து கொண்டே வருகிறது என்பதை அறிவோம். இந்தக் குறையும் வீதம் தரப்பட்டால், கல் எவ்வளவு உயரம் போகும்? ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்தில் அதன் வேகம் என்ன? என்ற இவை போன்ற ஆராய்ச்சிக்குத் துணை புரிவது நுண் கணிதம் ஆகும். இச் சிறு நூலில் நுண் கணிதத்தின் அடிப்படையையும், அதன் எளிய பயன்பாடுகளையும் ஓரளவுக்கு விவரிப்போம். இது துவக்க நூலாதலின் கணிதத்திற்கே உரிய தருக்க ரீதியான செவ்விய நிறுவல்களைச் சொல்லாமல் உள்ளுணர்வால் (intutively) அறியும் முறையைப் பின்பற்றுவோம்.

1.3 சார்பலன், எல்லை (functions and limits) **:** சார்பலனைப் பற்றி இயற்கணிதத்தில் விரிவாகக் கூறப்படுகிறது. இங்கு ஒரு சில உதாரணங்களை மட்டும் கூறுவோம். r அலகு ஆரமுள்ள வட்டத்தின் பரப்பளவு A ச. அலகுகள் ஆனால் $A=\pi r^2$ என்பது Aஐயும் rஐயும் இணைக்கும் சூத்திரமாகும். இங்கு A எனும் ராசியும் r எனும் ராசியும், விட்டம் மாறுபட்டால், மாறும் ராசிகள் (variables) ஆகும். ஆனால் π மாறாது. π என்பது வட்டம் யாதாயினும் அதன் வட்டப் பரிதிக்கும், விட்டத்திற்கும் இடையேயுள்ள நிலையான வீதமாகும். (இதன் ஒரு தோராய மதிப்பு $\frac{22}{7}$; மற்றொன்று 3·1416) π என்பது மாறா ராசி அல்லது நிலை எண் (constant) எனப்படும். இது போன்று பல அளவுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளைத் தரும் சூத்திரங்களை அறிவியல் நூல்களில் காணலாம். இரண்டிற்கும் மேற்பட்ட மாறிகளையுடைய சூத்திரங்களும் உள்ளன. (எ-டு.) $PV=RT$; $V=\pi r^2 h$ என்பன. முதல் சூத்திரம் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருண்மையுடைய வாயுவின் அழுத்தம் (P), கொள்ளளவு (V), அதன் வெப்பநிலை (T) என்பவற்றை இணைக்கும் சூத்திரமாம். 'R' என்பது இங்கு நிலை எண். ஆனால் இந்நூலில் இரண்டு மாறிகளின் தொடர்பைத் தரும் சார்பலன் மட்டுமே கூறப்படும்.

1.4 சார்புக் குறியீடு : இரண்டு மாறிகளில் ஒன்றைத் தனி மாறி (Independent variable) என்றும், மற்றதைச் சார்பு மாறி (dependent variable) என்றும் கூறுவோம். பொதுவாக— ஒரு சில இடங்களைத் தவிர— x எனும் எழுத்தால் தனி மாறியையும், y எனும் எழுத்தால் சார்பு மாறியையும் குறிப்போம்.

$f(x)$, $F(x)$, $g(x)$ எனப் பலவகைகளில் x இன் சார்பலன்களைப் பொதுப்படையாகக் குறிப்போம். xக்கும் yக்கும் உள்ள தொடர்பை $y = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டால் கூறுவோம்.

1.5 எல்லை (Limit): நுண் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்து 'எல்லை' ஆகும். ஆகவே, இந்தக் கருத்தை ஒரு சில எடுத்துக்காட்டுக்களால் முன்னர் விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு **1:** $f(x) = 2x + 3$ என்பது ஒரு சார்பலன். இங்கு xக்கு 4 எனப் பிரதியிட, $f(4) = 11$ என வருகிறது. 4இலிருந்து சற்றே வித்தியாசமான மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டால் வருபவற்றைப் பட்டியலில் தருவோம்.

$f(3{\cdot}9) = 10{\cdot}8$	$f(4{\cdot}1) = 11{\cdot}2$
$f(3{\cdot}99) = 10{\cdot}98$	$f(4{\cdot}01) = 11{\cdot}02$
$f(3{\cdot}999) = 10{\cdot}998$	$f(4{\cdot}001) = 11{\cdot}002$

பட்டியலிலிருந்து நாம் அறிவது:

x இன் மதிப்பு 4 எனும் எண்ணை இருபுறமிருந்தும் அணுகும்போது சார்பலனின் மதிப்பு 11ஐ அணுகுகிறது என்பதாம். xஇன் மதிப்பு 4ஐ அணுகும்போது $f(x)$இன் 'எல்லை' 11 எனப்படும். இது குறியீட்டில்

$$\underset{x\to 4}{Lt}\; f(x) = 11$$ என எழுதப்படும்.

('Lt' என்றால் 'limit' என்பதாகும். $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 11$ எனவும் இது எழுதப்படுகிறது.)

$x\to 4$ என்றால் xஇன் மதிப்பு 4ஐ நெருங்குகிறது என்பது பொருளாகும். (ஆனால் 4 என்ற மதிப்பைக் கொள்கிறது என்று பொருளல்ல என்பது கவனிக்கத்தக்கது.) அப்போது $2x+3$ என்ற சார்பலன் 11ஐ அணுகுகிறது என்று மட்டுமே பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு **2 :** $\underset{x\to 3}{Lt} \dfrac{x^2 - x - 6}{(x-3)}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்குச் சார்பலன் $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

$$= \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)}$$

$$= x + 2 \quad (x \neq 3)$$

$\therefore$ $x \to 3$ ஆகும்போது $f(x) \to 5$.

($x = 3$ என்று பிரதியீடு செய்வதில்லை. ஆதலால் $(x - 3)$ ஆல் வகுப்பது முறையே.)

$$\therefore \ \underset{x \to 3}{Lt} \ \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$$

1.6 எல்லையின் திட்டமான வரையறை: இப்போது $\underset{x \to a}{Lt} \ f(x)$ என்பதன் திட்டமான வரையறையைக் கூறுவோம்.

ϵ என்ற கிரேக்க எழுத்து 'எப்சிலான்' எனப் படிக்கப்பட வேண்டும். மிகச் சிறிய எண்ணை இவ்வெழுத்தால் குறிப்பது வழக்கம். இன்னுமொரு சிறு எண்ணையும் குறிக்கவேண்டுமானால் δ (டெல்டா) எனும் கிரேக்க எழுத்தால் குறிப்போம். $|x - a|$ என்றால் xக்கும் aக்கும் உள்ள வித்தியாசம் — நேரெண்ணால் தரப்படுவதாகும். இதை 'மாடுலஸ்' $(x - a)$ எனப் படிக்கவும்.

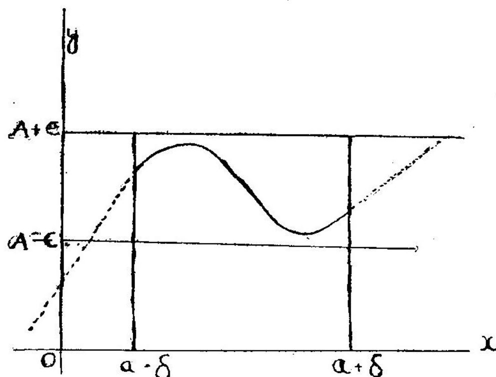
1.7 எல்லையின் வரையறை: 'x' எனும் மாறும் ராசி aஐ அணுகும்போது $f(x)$ எனும் அதன் சார்பலன் 'A' எனும் எல்லையை அணுகுகிறது என்று சொன்னால், அதன் பொருள்,

ϵ எத்தகைய சிறு எண்ணாயினும் $|f(x) - A| < \epsilon$ எனும் படி $|x - a| < \delta$ ஆக, δ எனும் சிறு எண் காணமுடியும் என்பதாம்.

குறியீட்டில் $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$ எனும்படி $a - \delta < x < a + \delta$ என, δ காணமுடியும் என்பதாம்.

இதையே $\underset{x \to a}{Lt} \ f(x) = A$ எனவும் கூறுகிறோம்.

1.8 கருத்தின் படவிளக்கம் : $y=f(x)$ என்பதன் வரை படம் வரைவோம். அதில் $x=a-\delta$, $x=a+\delta$ என்பதன் வரை களையும் $y=A-\epsilon$, $y=A+\epsilon$ என்பதன் வரைகளையும் வரை வோம். இந்த நான்கு நேர்கோடுகளால் ஆகிய செவ்வகத் துள், δ, ϵ சுருங்கினும் வரைபடம் அமையும்.



படம் 1

1.9 சில 'எல்லை'த் தேற்றங்கள் : 'எல்லைகளை'க் காண் பதற்குச் சில தேற்றங்கள் பயன்படுத்தப்படும். அவைகள் நிருபணமின்றிக் கீழே தரப்படுகின்றன.

$\underset{x\to c}{Lt}\ f(x)=A;\qquad \underset{x\to c}{Lt}\ g(x)=B$ ஆகுக.

தேற்றம் (1) : $\underset{x\to c}{Lt}\ [f(x)+g(x)]=\underset{x\to c}{Lt}\ f(x)+\underset{x\to c}{Lt}\ g(x)=A+B$

தேற்றம் (2) : $\underset{x\to c}{Lt}\ [f(x).\ g(x)]=\underset{x\to c}{Lt}\ f(x).\ \underset{x\to c}{Lt}\ g(x)=AB$

தேற்றம் (3) : $\underset{x\to c}{Lt}\ \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\underset{x\to c}{Lt}\ f(x)}{\underset{x\to c}{Lt}\ g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0)$

1.10 சில 'திட்ட' எல்லைகள் (Standard Limits) :

1. $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

(i) 'n' நேர் முழு எண் (Positive integer) ஆகுக.

அப்போது $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots\dots\dots + a^{n-1})$

xக்கு 'a' எனப் பிரதியிடப் போவதில்லையாதலால் இரு புறங்களையும் $(x-a)$ ஆல் வகுக்க.

$$\frac{x^n - a^n}{(x-a)} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots \dots \dots + a^{n-1}.$$

$$\therefore \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \underset{x \to a}{Lt} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots\dots + a^{n-1})$$

$= \underset{x \to a}{Lt} x^{n-1} + \underset{x \to a}{Lt} x^{n-2}a + \dots$ (என n உறுப்புக்கள்.)

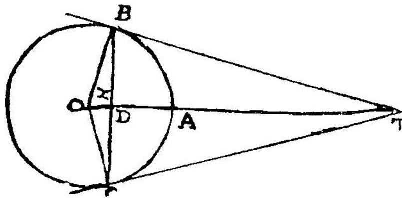
$= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots \dots$ என n உறுப்புக்கள்.

$= \underline{na^{n-1}}.$

(ii) n எந்த விகிதமுறு எண்ணாயினும் இத்தேற்றம் பொருந்துமெனநிறுவலாம்.

2. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\text{Sin}\,x}{x} = 1.$

(குறிப்பு : x என்பது இங்குக் கோணத்தின் அளவைக் குறிக்கிறது. இந்த நூல் முழுவதும் கோண அளவு ரேடியன் அலகுகளில் தரப்படும்).



படம் 2

படத்தில் O என்பது ஒரு வட்ட மையம். BAC வட்ட வில். BC எனும் நாணுக்குக்குக் குத்தாக உள்ளது OA எனும்

ஆரம்; எனவே, அது BCஐ Dஇல் சமக்கூறிடுகிறது; வட்ட வில்லையும் A இல் சமமாகப் பிரிக்கிறது.

$\therefore$ B, C என்ற புள்ளிகளில் உள்ள வட்டத் தொடுகள் OAஐ T எனும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

$\underline{|BOC} = 2x$ ரேடியன் ஆகுக.

$\therefore \underline{|COA} = \underline{|AOB} = x$ ரேடியன்

$\therefore$ வட்ட வில் $BC = OB.2x = 2 \cdot OB.x$

$\therefore$ வில் $\underline{BA = OB.x}$

படத்திலிருந்து நாம் காண்பது

நாண் $BC <$ வில் $BAC < BT + TC \quad (BT = TC)$

$$\therefore \quad BD < BA < BT$$

$$\therefore \quad OB \sin x < OB.x < OB \tan x$$

$$\therefore \quad \sin x < x < \tan x$$

$\sin x$ நேரெண்ணானதால், $\sin x$ ஆல் வகுக்க.

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$\therefore 1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$ எனும் சமனின்மை வருகிறது.

$x \to 0$ ஆகும்போது $\cos x \to 1$ ஆகிறது. இந்தச் சமனின்மை 0ஐ அடுத்த எல்லா x இன் மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துமாதலால் $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ ஆகிறது.

அதாவது $\displaystyle \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} = 1$

[குறிப்பு 1 : $\dfrac{\tan x}{x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Big/ x$

$$= \frac{\sin x}{x} \Big/ \cos x$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan x}{x} = \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} \Big/ \underset{x \to 0}{Lt} \cos x$$

$$= \frac{1}{1} = 1.$$

குறிப்பு 2: $$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin mx}{x} = \underset{x \to 0}{Lt}\ m \frac{\sin mx}{mx}$$

$$= \underset{mx \to 0}{Lt}\ m \frac{\sin mx}{mx}$$

$$= m.\ 1$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin mx}{x} = m$$

[இதேபோல $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\tan\ mx}{x} = m.$]

1.11 'வகைக்கெழு'வின் விளக்கம் :

$S = 16t^2$ என்பது ஒரு சூத்திரம். இது கீழே விடப்பட்ட கல் t விநாடியில் விழும் தூரம் s அடி என்றால் s ஐயும் t ஐயும் இணைக்கும் சூத்திரமாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் கல்லின் வேகம் என்ன என்பதைக் காணலாம். உதாரணமாக 2 ஆவது விநாடியில் அதன் வேகத்தைக் காண :

2ஆவது விநாடியில் அதன் நிலை என்ன? அதற்குப் பிறகு 'Δt' காலம் சென்றதும் அதன் நிலை என்ன? ஆகவே 'Δt' காலத்தில் அது சென்ற தூரம் என்ன? சென்ற தூரத்தை Δtஆல் வகுத்து $\Delta t \to 0$ ஆகும்போதுள்ள எல்லை என்ன? என்று கண்டால் அதுவே கல்லின் வேகமாகும். இவ்வாறு வேகத்தைக் கீழே காணுவோம்.

இங்கு $S = f(t) = 16\ t^2$

$t = 2$ என்றால் $f(2) = 64$

$t = 2 + \Delta t$ என்றால் $f(2 + \Delta t) = 16\ (2 + \Delta t)^2$

$$= 64 + 64\ \Delta t + (\Delta t)^2$$

ஆகவே Δt காலத்தில் சென்ற தூரம்

$$\Delta s = f(2 + \Delta t) - f(2)$$

$$= 64\ \Delta t + (\Delta t)^2$$

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = 64 + (\Delta t)$$

$\therefore$ கல்லின் வேகம் $\underset{\Delta t\to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 64$

$\therefore$ கல்லின் வேகம் 2வது விநாடியில் **64** அடி/விநாடி.

இங்குக் கல் விழும் தூரம் 's' என்பது, காலம் 't'இன் சார்பலன்; 't' மாறும்போது 's' மாறுகிறது. t ஐத் தனி மாறியாகவும், s ஐச் சார்பு மாறியாகவும் கொள்கிறோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் கல்லின் வேகம் என்பது என்ன? அந்த நேரத்தில் t இன் மதிப்புக்கேற்ற s இன் மதிப்பைக் காண்கிறோம். பிறகு அதிலிருந்து 'Δt' எனும் மாறுதல் தனிமாறியில் ஏற்பட, s இல் ஏற்படும் Δs எனும் மாறுதல் காண்கிறோம். பிறகு $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ எனும் விகிதத்தின் எல்லை $\Delta t\to 0$ என்ன என்பதைக் காண்கிறோம். அதைக் கல்லின் வேகம் என்கிறோம். இங்கு $\underset{\Delta t\to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ எனும் நுண் விகிதத்தின் எல்லையைக் கணக்கிடுகிறோம். இந்த எல்லை 't' ஐப் பற்றிய sஇன் வகைக்கெழு (Differential coefficient of s with respect to t) எனப்படும்.

இதுபோன்று அறிவியல் நூல்களில் பல சார்பு மாறிகளின் வகைக்கெழுக் காணும் அவசியம் ஏற்படுகிறது.

1.12 வகைக்கெழுவின் வரையறை : x என்ற தனிமாறியின் சார்பலன் $f(x)$ ஆகுக. x ஐப் பற்றிய $f(x)$இன் வகைக்கெழு என்பது $\underset{\Delta x\to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ எனும் எல்லையாகும்.

(குறிப்பு : Δx எனும் நுண்ணிய மாறுதலை 'h' எனவும் குறிப்பது வழக்கம். அப்போது $f(x)$இன் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு $\underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ எனும் எல்லை என்பதாம். நாம் இக்குறியீட்டையும் பயன்படுத்துவோம்.

$f(x)$இன் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழுவை $f'(x)$ எனும் குறியீட்டால் குறிப்பது வழக்கம்.

கணக்கு 1: வரையறையைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{x^2}$ இன் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

வரையறையிலிருந்து xஐப் பற்றிய $f(x)$இன் வகைக்கெழு

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lt} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h}$$

$$= \underset{x+h\to x}{Lt} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{(x+h)-x}$$

$= -2\,x^{-3}$ [திட்ட எல்லை $\underset{x\to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ எனும் சூத்திரப்படி]

$$= \frac{-2}{x^3}$$

அல்லது

$$f'(x) = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore\ f(x+h) - f(x) = \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 (x+h)^2}$$

$$= \frac{-2xh - h^2}{x^4 + 2x^3h + x^2h^2}$$

$$\therefore \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2x - h}{x^4 + 2x^3h + x^2h^2} \qquad (\because h \neq 0)$$

$$\therefore \underset{h\to o}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\underset{h\to o}{Lt}\ (-2x-h)}{\underset{h\to o}{Lt}\ (x^4+2x^3h+x^2h^2)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

கணக்கு 2 : வரையறையைப் பயன்படுத்தி tan $2x$இன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

$$f(x) = \tan 2x$$

$$\text{வகைக்கெழு } f'(x) = \underset{h\to o}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x+h)-f(x) = \tan 2(x+h) - \tan 2x$$

$$= \frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \cos(2x+2h)\sin 2x}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin[2x+2h-2x]}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin 2h}{\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$\therefore f'(x) = \underset{h\to o}{Lt}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to o}{Lt}\ \frac{\sin 2h}{h\cos(2x+2h)\cos 2x}$$

$$= \underset{2h\to o}{Lt}\ \frac{2\sin 2h}{2h\cos(2x+2h)\cos 2h}$$

$$= \frac{2}{\cos 2x\cos 2x} = 2\sec^2 2x$$

$f(x) = \tan 2x$ என்றால் $f'(x) = 2\sec^2 2x$

[**குறிப்பு :** $\underset{x\to 0}{Lt}\ \frac{\sin mx}{x} = m$ என்பதைப் பயன்படுத்தி

$\underset{h\to o}{Lt}\ \frac{\sin 2h}{h} = 2$ எனவும் பிரதியிட்டு முடிவுக்கு வரலாம்.]

பயிற்சி 1

1. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ என n இன் முழு எண் மதிப்புக்களுக்கு நிறுவுக.

2. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ என (x ரேடியன் அளவையில் தரப்படும் போது) நிறுவுக.

3. $f(x)$ இன் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு என்றால் என்ன என்பதை விளக்குக.

4. வகைக்கெழுவின் வரையறையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் சார்பலன்களின் வகைக்கெழுக் காண்க:

(i) x^4 (ii) $2x^2+5$ (iii) $\dfrac{1}{x^2+2}$ (iv) $\cos 2x$

(v) $\cot 2x$ (vi) $\sec x$ (vii) $\operatorname{cosec} 2x$.

2. வகைக்கெழு காணும் முறை

(Methods of finding derivatives)

ஒரு சார்பலனின், (முதல் மாறியைச் சார்ந்த) வகைக் கெழு என்ன என்பதை வரையறுத்தோம். இத்தகைய வரையறையைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிட்ட சில சார்பலன்களின் வகைக்கெழு காணும் முறையை உரைத்தோம். ஆனால் ஒவ்வொரு சார்பலனுக்கும் அடிப்படையிலிருந்து வகைக் கெழுக் காண்பது எளிதன்று; அவசியமும் அன்று.

ஒரு சில திட்டச் சார்பலன்களின் வகைக்கெழுக்களை அடிப்படையினின்று கண்டு 'வகைக்கெழு வாய்பாடு' களை அமைப்போம். இவற்றின் உதவியால் மற்றச் சார்பலன்களுக்கு வகைக்கெழு காணும் விதிகளை நிருபணங்களுடன் கூறுவோம்.

2.1 *I (i)* x^n **இன் வகைக்கெழு காணல்:**

முதல் முறை : *(i)* $y=x^n$

x என்ற மதிப்பால் ஏற்படும் நுண்ணிய கூடுதல் Δx ஆகுக. இதனால் y இல் ஏற்படும் நுண்ணிய மாறுதல் Δy ஆகுக. இப்போது $x+\Delta x$க்கு ஏற்ற சார்பலன் மதிப்பு $y+\Delta y$.

$$(ii) \quad \therefore \quad y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

$$(iii) \quad \therefore \quad \Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

$$(iv) \quad \therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}$$

$\underset{x\to o}{Lt}\ \dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம். $x+\Delta x\to x$ என்றால் $\Delta x\to o$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to o}{Lt}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to o}{Lt}\ \frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{(x+\Delta x)-x}=nx^{n-1}$$

$\therefore\ y=x^n$ என்றால் $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

இரண்டாவது முறை : $f(x)=x^n$ என்றால்

வகைக்கெழு $f'(x)=\underset{h\to o}{Lt}\ \dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$\therefore\ f'(x)=\underset{h\to o}{Lt}\ \frac{(x+h)^n-x^n}{(x+h)-x}$$

$$=\underset{x+h\to x}{Lt}\ \frac{(x+h)^n-x^n}{(x+h)-x}$$

$$=nx^{n-1}$$

$\therefore$ x^n இன் x ஐப்பற்றிய வகைக்கெழு nx^{n-1} ஆகும்.

2.2 sin x இன் வகைக்கெழு காணல் :

$$f(x)=\sin x$$

என்றால் வகைக்கெழு $f'(x)=\underset{h\to o}{Lt}\ \dfrac{\sin(x+h)\sin x}{h}$

$$=\underset{h\to o}{Lt}\ \frac{2\cos(x+h/2)\sin h/2)}{h}$$

$$=\underset{h\to o}{Lt}\ \frac{2\sin h/2}{h}\cdot\underset{h\to o}{Lt}\ \cos(x+h/2)$$

$$=2.\tfrac{1}{2}\cos x$$

$$=\cos x$$

[$\underset{h\to o}{Lt}\ \dfrac{\sin mh}{h}=m$ என்பதைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.]

$\therefore$ sin x இன் வகைக்கெழு cos x

அல்லது

$y=\sin x$ என்றால் $\dfrac{dy}{dx}=\cos x$

2.3 $\cos x$ **இன் வகைக்கெழு காணல் :**

$$f(x) = \cos x$$

$$\therefore \text{ வகைக்கெழு } f'(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-2\sin(x+h/2)\sin h/2}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{-2\sin h/2}{h} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \sin\left(x+h/2\right)$$

$$= -2 \cdot \tfrac{1}{2} \sin x$$

$$= -\sin x$$

$\therefore$ $\cos x$ இன்வகைக்கெழு $-\sin x$ அல்லது

$y = \cos x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

2.4 மாறிலியின் வகைக்கெழு காணல் :

மாறிலி c ஆகுக.

$f(x) = c$ என்றால் $f(x+h)$உம் c ஆகும்

$$\therefore \text{ வகைக்கெழு } f'(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{c-c}{h} = 0$$

[$c - c$ சரியாகப் பூச்சியம் ஆதலால் $\frac{0}{h} = 0$; $h \to 0$ என்பதேயன்றி $h \neq 0$ என்பது கவனிக்கத்தக்கது.]

2.5 $\tan x$ **இன் வகைக்கெழு காணல்:**

$$f(x) = \tan x \text{ என்றால் } f'(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x \cdot h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin h}{h} \cdot \underset{h \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 . \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x$$

$\therefore f(x) = \tan x$ என்றால் $f'(x) = \sec^2 x$.

இதேபோல $f(x) = \cot x$ என்றால் $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$; $f(x) = \sec x$ என்றால் $f'(x) = \sec x \tan x$; $f(x) = \operatorname{cosec} x$ என்றால் $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$ ஆகும்.

முக்கிய வகைக்கெழுப் பட்டியல்

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{I}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathrm{scc}^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

2.6 $Kf(x)$ என்பதன் வகைக்கெழு :

இதன் வகைக்கெழு $= \underset{h \to o}{Lt} \frac{Kf(x+h) - kf(x)}{h}$

$$= K\left[\underset{h \to o}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]$$
$$= Kf'(x)$$

$\therefore f(x)$ இன் வகைக்கெழு $f'(x)$ என்றால் $Kf(x)$ இன் வகைக்கெழு $Kf'(x)$ ஆகும்.

குறிப்பு :

$y = cu$ என்பதில் c மாறிலியாகவும் y உம் u உம் x இன் சார்பலன்களாகவும் ஆனால், $\frac{dy}{dx} = C\frac{du}{dx}$ எனவாகிறது.

2.7 குறிப்பிட்ட சார்பலன்களின் கூடுதலின் வகைக்கெழு, ஒவ்வொன்றின் வகைக்கெழுக்களின் கூடுதலாகும்.

u, v, w என்பவை xஇன் சார்பலன்கள் எனக் கொள்க. y அவற்றின் கூடுதலானல் $y = u+v+w$.

x இன் மதிப்பில் ஏற்படும் நுண்ணிய கூடுதல் Δx ஆகுக. இதனல் u, v, w, y இல் ஏற்படும் நுண்ணிய மாறுதல்கள் முறையே Δu, Δv, Δw, Δy ஆகுக.

$$\therefore \quad y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) + (w+\Delta w)$$

$$\therefore \quad \Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to o}{Lt} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}\right]$$

$$= \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

$\therefore \quad y = u+v+w$ ஆனுல்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$$

குறிப்பு: $y = u+v-w$ என்ருல்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$ ஆகும்.

கணக்கு 1: $y = x^5 - 3^2 + 4^2$

என்ருல் $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x$ ஆகும்.

கணக்கு 2: $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 2}{x^2}$

என்ருல் $y = x - 3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx^2} = 1 - 0 - \frac{4}{x^2} - \frac{2.2}{x^3}$$

$$= 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

கணக்கு 3: $y = \sin x - \cos x$ என்றால்

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - (-\sin x)$$

$$= \cos x + \sin x$$

[இங்கு $-\cos x$ இன் வகைக்கெழு $+\sin x$ என உடனே எழுதுதல் நலம்.]

பயிற்சி 2

கீழ் வரும் சார்பலன்களின் (தனிமாறியைப் பற்றிய) வகைக்கெழுக் காண்க.

(i) x^2-7x+5 (ii) $3x^2-8x-4$ (iii) px^2+qx+r

(iv) $(4x-5)^2$ (v) $3x^{10}-6x^5+x$ (vi) $\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+1$

(vii) $\frac{x^3-4x^2+1}{x^4}$ (viii) $\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$ (ix) $(\sqrt{x}-3)^3$

(x) $2\sin x-5\cos x+3$ (xi) $x^2-2\cos x$ (xii) $2x-4\sin x$.

2·8 சார்பலன்களின் பெருக்கற்பலன்களின் வகைக் கெழு காணல் விதி:

$y = u\,v$ ஆகுக.

இங்கு u, v என்பவை x இன் சார்பலன்களாகும். x எனும் மதிப்பில் ஏற்படும் நுண்ணிய கூடுதல் Δx ஆகுக. இதனால் u, v, y எனும் சார்பலன்களில் ஏற்படும் நுண் மாறுதல்கள் முறையே Δu, Δv, Δy ஆகுக. சார்பலன் தொடர்பு, மாறிய மதிப்புக்களிடையேயும் நிலவுவதால்

$$y+\Delta y = (u+\Delta u)\,(v+\Delta v)$$

$$\therefore \Delta y = (u+\Delta u)\,(v+\Delta v) - uv$$

$$= u\,(\Delta v) + v\,(\Delta u) + (\Delta u)\,(\Delta v)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$$

$\therefore \quad \Delta x \to o$ ஆகும்போது

(i) u, v மாருது ;

(ii) $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ என்பவையும் $\to o$ ஆகும் ;

(iii) $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{dv}{dx}$; $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to o}{Li} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\,0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

குறிப்பு 1: $y = uvw$ என்ருல் மேற்கண்ட விதியைப் பயன்படுத்த,

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + w\,\frac{d(uv)}{dx}$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + w\left[v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right]$$

$$= uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

பெருக்கற்பலன்களின் வகைக்கெழு எழுத :

ஒவ்வொரு சார்பலனின் வகைக்கெழுவையும் எழுதி மற்ற வற்ருல் பெருக்கவும். இவ்வாறு வருபனவற்றின் மொத்தக் கூடுதல் சார்பலன்களின் பெருக்கற்பலனின் வகைக்கெழு வாகும்.

கணக்கு 1: $y = (x+2)\sqrt{x}$ என்பத வகைக் கெழுவைக் காண்.

$$\frac{dy}{dx} = (x+2)\frac{d}{dx}\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{d}{dx}(x+2)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x+2)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\ (1)$$

$$= \frac{x+2+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$$

[மற்ருெரு முறை : $y = x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$

$$= x^{3/2} + 2x^{1/2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2} x^{1/2} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x+2}{2\sqrt{x}} .]$$

கணக்கு 2: $y = x^2 \sin x \cos x$ என்பதன் வகைக் கெழுவைக் காண்.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$+ x^2 \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$+ \sin x \cos x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \sin x (-\sin x)$$

$$+ x^2 \cos x (\cos x)$$

$$+ \sin x \cos x . 2x$$

$$= -x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x + 2x \sin x \cos x$$

[$y = x^2 \sin x \cos x$ என்றால்,

$\frac{dy}{dx} = -x^2 \sin^2 x + x^2 \cos^2 x + 2x \sin x \cos x$ என உடனே எழுதப் பழகவும். மேற்கூறிய வழிகள் யாவும் மனதில் ஓட வேண்டும்.]

பயிற்சி 3

வகைக்கெழு காண்க:

(i) $(x^2-4)(x^4+3)$ (ii) $x \sin x$ (iii) $\sin x \cos x$ (iv) $\sqrt{x}(x^3+3x^2)$ (v) $(ax+b)(x^2+cx+c^2)$ (vi) $x^2 (\sin x + \cos x)$ (vii) $x^3 \sin x \cos x$ (viii) $2x \sin x \tan x$ (ix) $x^2 \cos x \cot x$.

2.9 $y = \frac{u}{v}$ **இல்** u, v **என்பன** x**இன் சார்பலன்கள் என்ருல்** $\frac{dy}{dx}$ **காண விதி:**

x இல் ஏற்படும் நுண்ணிய கூடுதல் Δx ஆகுக. இதனுல் u, v, y என்ற சார்பலன்களில் ஏற்படும் நுண்ணிய மாறுதல்கள் முறையே Δu, Δv, Δy ஆகுக. ஆகவே $y+\Delta y$, $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ என்பவை மேற்கண்ட தொடர்பில் உள்ளன.

அதாவது $y+\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$

$$\therefore \quad \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv+v\Delta u - vu - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2+v\Delta v}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}$$

$\Delta x \to o$ ஆகும்போது $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$; $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{dv}{dx}$; $\Delta v \to o$

[v, u மதிப்புக்கள் அவ்வாறே உள்ளன. ஆகவே எல்லைகளைக் கணக்கிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

கணக்கு 1 : $y = \tan x$ என்ருல் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

[$y = \frac{u}{v}$ என்ருல் $\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}$

என்ற விதியைப் பயன்படுத்த]

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\therefore \quad y = \tan x$ **என்றால்** $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ **ஆகும்.**

கணக்கு 2 : $y = \frac{1}{\cos x}$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ **காண்க.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - 1 . \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

$\therefore \quad y = \sec x$ **என்றால்** $\frac{dy}{dx}$ $\sec x \tan x$ **ஆகும்.**

இதேபோல $y = \cot x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = - \operatorname{cosec}^2 x$

$y = \operatorname{cosec} x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = - \operatorname{cosec} x \cot x$

என வரும். (செய்து பார்க்கவும்.)

கணக்கு 3. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 5x - 6}$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ **காணவும்.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+5x-6)\frac{d}{dx}(x^2-2x+1) - (x^2-2x+1)\frac{d}{dx}(x^2+5x-6)}{(x^2+5x-6)^2}$$

$$= \frac{(x^2+5x-6)(2x-2) - (x^2-2x+1)(2x+5)}{(x^2+5x-6)^2}$$

$$= \frac{[2x^3+8x^2-22x+12] - [2x^3+x^2-8x+5]}{(x^2+5x-6)^2}$$

$$= \frac{7x^2 - 14x + 7}{(x^2+5x-6)^2}$$

பயிற்சி 4

வகைக்கெழுக் காண்க.

(i) $\dfrac{3x+4}{5x-3}$ (ii) $\dfrac{1-2x}{1-x}$ (iii) $\dfrac{ax+b}{bx+a}$

(iv) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ (v) $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$

(vii) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ (viii) $\dfrac{3+4\sin x}{4+3\sin x}$ (ix) $\dfrac{1}{\cos x}$

(x) $\operatorname{cosec} x$

2.10 சார்பலனின் சார்பலன் (function of a function) :

$\sin x^2$ என்பது x^2இன் சைன் விகிதமாகும். x^2 என்பது xஇன் அடுக்குச் சார்பலனுகும். $\sin x$ என்பது xஇன் அடுக்குச் சார்பலனின் சைன் சார்பலனுகும். இவ்வாறு ஒன்றனுள் ஒன்ருக அமையும் சார்பலனில், முடிவில் உள்ள ஒரு முதல் மாறியைச் சேர்ந்த வகைக்கெழு காணும் விதியைக் கூறுவோம்.

$y=\sin x^2$

x^2 என்பது u ஆகுக.

$\therefore \quad y=\sin u; \quad u=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta u\to 0}}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta u\to 0}{Lt}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\underset{\Delta x\to 0}{Lt}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}=\cos u;\ \frac{du}{dx}=2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u.\ 2x=\cos x^2.\ 2x$$

$$\therefore \quad y=\sin x^2 \text{ என்ருல் } \frac{dy}{dx}=2x\cos x^2$$

இதை எடுத்துக்காட்டாய் விவரித்தோம். இப்போது பொது விதியைக் கூறுவோம்.

y என்பது u இன் சார்பலனாகுக;

u என்பது vஇன் சார்பலனாகுக;

v என்பது xஇன் சார்பலனாகுக.

என்றால் $\frac{dy}{dx}$ காண, விதி என்ன என்பதைக் காண்போம்.

xஇல் ஏற்படும் நுண்ணிய கூடுதல் Δx ஆகுக. இதனால் u, v, y இல் ஏற்படும் மாறுதல்கள் முறையே Δu, Δv, Δy ஆகுக.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$\Delta x \to 0$ ஆகும்போது $\Delta u \to 0$; $\Delta v \to 0$

அப்போது $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta y}{\Delta u} \to \frac{dy}{dx}$; $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$= \underset{\Delta u \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \underset{\Delta v \to 0}{Lt} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

கணக்கு : $y = \sin mx$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

$$y = \sin u; \quad u = mx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ஆனால் $\frac{dy}{du} = \cos u$; $\frac{du}{dx} = m$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot m = m \cos mx$$

$\therefore$ $y = \sin mx$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = m \cos mx$,

இதுபோன்று

$y = \cos m x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = -m \sin mx$

$y = \tan m x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = m \sec^2 mx$

$y = \cot m x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = -m \operatorname{cosec}^2 mx$

$y = \operatorname{scc} m x$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = m \sec mx \tan mx$

$y = \operatorname{cosec} mx$ என்றால் $\frac{dy}{dx} = -m \operatorname{cosec} mx \cot mx$

கணக்கு : $y = \sin^2 (x^3)$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$\sin x^3$ என்பதை u எனவும், x^3 என்பதை v எனவும், கொள்க.

$\therefore \quad y = u^2;$

$u = \sin v; \quad v = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= (2u)\ (\cos v)\ (3x^2)$$

u, v என்பவற்றிற்கு xஇல் பிரதியிட

$$\frac{dy}{dx} = 2\ (\sin x^3).\ \cos x^3 \cdot 3x^2$$

$$= 6x^2 \sin x^3 \cos x^3$$

இதன் வழிகளை மனதில் செய்யப் பழக வேண்டும்.

(i) $(\sin x^3)$இன் அடுக்கு 2; $\therefore$ வகைக்கெழு $2 (\sin x^3)$

(ii) sin சார்பலன் வகைக்கெழு $\cos x^3$

(iii) x^3இன் வகைக்கெழு $3x^2$

∴ முடிவில் வகைக்கெழு இவற்றின் பெருக்கற்பலன்.

∴ $y = \sin^2 x^3$ என்றால்

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin x^3 . \cos x^3 . \quad 3x^2.$$

$$= 6x^2 \sin x^3 \cos x^3]$$

கணக்கு : $y = (2x^2 + \tan x^3)^7$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

[$\frac{dy}{dx}$ காண ; y என்பது $(2x^2 + \tan x^3)$ இன் 7ஆவது அடுக்கு.

ஆகவே முதல் வகைக்கெழு $7 (2x^2 + \tan x^3)^6$

$2x^2 + \tan x^3$ இன் வகைக்கெழு $= 4x + \frac{d}{dx} \tan x^3$

$$= 4x + \sec^2 x^3 . \; 3x^2$$

∴ முடிவில் வகைக்கெழு $= 7 [(2x^2 + \tan x^3)^6 \; (4x + 3\sec^2 x^3 . x^2).]$

இவ்வாறு மனதில் செய்ய இயலாதெனில்

$u = 2x^2 + \tan x^2$ ஆகுக. $\quad \therefore \; y = u^7$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} \qquad \frac{dy}{du} = 7u^6$$

$$= 7u^6 . \frac{d}{dx} (2x^2 + \tan x^3)$$

$$= 7u^6 . \; (4x + \frac{d}{dx} \tan x^3)$$

$$= 7 (2x^2 + \tan x^3)^6 \;\; (4x + \frac{d}{dx} \tan x^3)$$

$w = \tan x^3$ இல் $x^3 = v$ என இடுக.

$$\therefore \quad w = \tan v$$

$$\therefore \quad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dv} . \frac{dv}{dx} = \sec^2 v . \; 3x^2$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} (\tan x^3) = 3x^2 \; \sec^2 x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 7 \; (2x^3 + \tan x^3)^6 \;\; (4x + 3x^2 \sec^2 x^3)$$

2.11 மீண்டும் முக்கியச் சார்பலன்களின் வகைக் கெழுப்பட்டியலைக் கீழே தருகிறோம் :

I. y	$\frac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^n+1}$
$\sin mx$	$m \cos mx$
$\cos mx$	$-m \sin mx$
$\tan mx$	$m \sec^2 mx$
$\cot mx$	$-m \operatorname{cosec}^2 mx$
$\sec mx$	$m \sec mx \tan mx$
$\operatorname{cosec} mx$	$-m \operatorname{cosec} mx \cot mx$

II. வகைக்கெழு காணும் விதிகள்

y	$\frac{dy}{dx}$
$u \pm v \pm w$	$\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$
uv	$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
uvw	$uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{v \frac{dv}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

பயிற்சி 5

வகைக்கெழு காண்க.

(i) $(4+3x)^{12}$ (ii) $(x^2-1)^{10}$ (iii) $\sqrt{2x^2+3}$

(iv) $\sqrt{2+\cos x}$ (v) $\dfrac{1}{a+b\cos x}$ (vi) $\dfrac{1}{1-\cos x}$

(vii) $\sin^5 x$ (viii) $\sin^2 x\cos x$ (ix) $x^2\sin^2 x$

(x) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x}$ (xi) $\dfrac{\cos^2 x}{\sin 2x}$ (xii) $\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}$.

பயிற்சி 6

கீழ்வரும் சார்பலன்களின் அவற்றின் தனிமாறியைப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க.

1. $y=4+8x-x^2$
2. $s=\dfrac{t^3-4t^2+6}{t}$
3. $w=\dfrac{z+1}{z-1}$
4. $w=\dfrac{1}{z^3-5z^2+2}$
5. $y=\dfrac{x^2}{x^2-3}$
6. $s=\dfrac{a-\cos t}{a+\cos t}$
7. $r=\tan 6\theta$
8. $r=\theta\tan 2\theta$
9. $w=\dfrac{z}{\cos^3 z}$
10. $y=\left(\dfrac{x^2-3}{x+1}\right)^3$
11. $s=\dfrac{2+\sin t}{2+\cos t}$
12. $w=\dfrac{1+\tan z}{1-\tan z}$

வகைக்கெழுவின் வரிசை (order of the derivative) :

$y=x^3$ என்றால் $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$. இவ்வாறு x^3இன் வகைக்கெழு $3x^2$ எனும் சார்பலனின் வகைக்கெழு $6x$ ஆகும். இரண்டாவது வரிசையில் காணப்படும் வகைக்கெழு $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ எனக் குறிக்கப்படும். $f(x)$ எனும் சார்பலனின் வகைக்கெழுவை $f'(x)$ என்றால் $f'(x)$ இன் வகைக்கெழுவை $f''(x)$ என்று குறிக்கவேண்டும். இவ்வாறு வரும் $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ அல்லது $f''(x)$, இரண்டாவது வரிசை-

வகைக்கெழு எனப்படும். [இன்னும் தொடர்ந்து மேல்வரிசை வகைக்கெழுக்கள் $\frac{d^3y}{dx^3}$ அல்லது $f'''(x)$ .... $\frac{d^ny}{dx^n}$ அல்லது $f^n(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.]

கணக்கு 1 : $y = 3\sin x + 4\cos x$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ எனக் காண்க.

$$y = 3\sin x + 4\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x - 4\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3\sin x - 4\cos x$$

$$= -(3\sin x + 4\cos x)$$

ஆனால் $y = 3\sin x + 4\cos x$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

கணக்கு 2 : $y = x\cos x$ என்றால் $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$ எனக் காண்க.

$$y = x\cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos x - x\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \sin x - x\cos x$$

$$= -2\sin x - x\cos x$$

$$\therefore \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -2x^2\sin x - x^3\cos x \qquad \text{(i)}$$

$$-2x\frac{dy}{dx} = +2x^2\sin x - 2x\cos x \qquad \text{(ii)}$$

$$(x^2+2)y = x^3\cos x + 2x\cos x \qquad \text{(iii)}$$

(i)+(ii)+(iii)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (x^2+2)y = 0$$

பயிற்சி 7

முதல் இரண்டு வரிசை வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

1. (i) $a+\frac{b}{x}$ (ii) $\frac{1}{x^3}$ (iii) $\cos x$ (iv) $(3x+5)$

(v) $\sin^2 x$ (vi) $\cos^2 2x$ (vii) $\sin(2x+1)$ (viii) $x \sin x$

(ix) $x^3 \sin 2x$ (x) $x^n \cos nx$

2. $y=3\sin 2x+4\cos 2x$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ எனக் காண்க.

3. $y=a\cos nx+b\sin nx$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$ எனக் காண்க.

4. $y=(x^2+a^2)^2$ என்றால் $(x^2+a^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}=2y$ என நிறுவுக.

5. $y=ax-bx^2$ என்றால் $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y=2x\frac{dy}{dx}$ என நிறுவுக. (a, b என்பவை மாறிலிகள்)

இரு மாறிகளின் உட்படு சார்பு :

x, y என்பவை இரு மாறிகள். y இன் மதிப்பு x இன் மதிப்பைச் சார்ந்ததாயின், சார்பை $y=f(x)$ என, yஐ xஇல் கூற முடியும். y இத்தகைய தொடர்புடையதெனின் y எனும் மாறி x எனும் தனி மாறியின் வெளிப்படைச் சார்பு (explicit function) எனப்படும். இதுவரை அத்தகைய சார்பலனையே கூறி வந்துள்ளோம். $\frac{dy}{dx}$ ஐ எளிதில் விதிகளைக் கொண்டு காணலாம். ஆனால் x உம் y உம் கலந்து வரும் தொடர்புகளும் உள்ளன. $2x^2+3xy+y^2=8$ எனும் சமன்பாட்டில் x உம் y உம் கலந்து வந்துள்ளன. y இன் மதிப்பை xஇல் தனியாகக் கூற இயலுமாயினும் அத்தகைய தொடர்பு எளிதாய் இராது. இவ்வாறு வெளிப்படையாக y இன் மதிப்பு x இன் சார்பலனாகக் கூறாமல் சமன்பாட்டால் கூறப்படுமாயின், yஆனது xஇன் **உட்படு சார்பலன்** எனப்படும். அத்தகைய சார்பலனில் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ உம் x, y இல் சார்பலனாக அமையும்.

கணக்கு : $2x^2+3xy+y^2=8$ என்றால் $x=2$, $y=0$ எனும் போது $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு என்ன?

விடுவிப்பு : இருபுறமும் வகைக்கெழு காண (x ஐப் பொறுத்த) $4x+3y+3x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\quad x=2;\ y=0$ என்றால் $8+6\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\quad$ இந்த இடத்தில் $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$.

[குறிப்பு : $\frac{dy}{dx}$ ஐப் பொதுவாகக் காண வேண்டுமெனில்

$$\frac{dy}{dx}(3x+2y)=-(4x+3y)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{(4x+3y)}{(3x+2y)}$$]

கணக்கு :

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன?

விடுவிப்பு : இருபுறத்திலும் x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காண,

$$\tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\tfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

பயிற்சி 8

கீழ்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பைக் காணவும்.

1. $x^3+y^3=a^3$ 2. $y^3+2y^2=x+1$ 3. $x^2+xy+y^2=8$

4. $x^3+3xy+y^3=1$ 5. $\sin mx-\cos ny=c$ 6. $(x+y)^2=2x^2+3y^2$

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 8. $ax^2+2hxy+by^2=c$

9. $y^3-3xy^2+a^2x=a^3$ என்றால் $x=a$; $y=3a$ எனும்போது $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு என்ன?

10. $a(x+y)=x^2+y^2$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் காண்க.

3. வகைக்கெழுவின் பயன்பாடுகள்

(Applications of the derivative)

3·1 மாறு வீதம்: (Rate of change)

x என்ற தனிமாறியைக் கொண்ட சார்புமாறி y ஆகுக. இரண்டிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைத் தரும் சமன்பாடு $y=f(x)$ ஆகுக. 'x'இல் தொடர்ந்து மாறுதல் நிகழும்போது yஇல் மாறுதல் நிகழும். x இன் ஒவ்வொரு மதிப்பில், ஏற்படும் மாறுதல், y இல் வெவ்வேறு மாறுதல் ஏற்படுத்தும். xக்கு 'x_1' என்ற மதிப்பு இருக்கும்போது y இன் மதிப்பு 'y_1' ஆகுக.

$$\therefore \quad y_1 = f(x_1) \text{ ஆகும்.}$$

x_1 இல் இருந்து x இல் ஏற்படும் கூடுதல் மதிப்பு Δx ஆகுக. அதனால் y இல் ஏற்படும் மாறுதல் (கூடுதலோ, குறைவோ) Δy ஆகுக.

அப்போது $\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ எனும் எல்லை x இன் மதிப்பு x_1 ஆக இருக்கும்போது y இல் ஏற்படும் மாறுவீதம் [Rate of change of y at $x=x_1$] எனப்படும்.

பொதுவாக $\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ எனும் எல்லை $\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும்.

$y = f(x)$ என்றால் இதை $f'(x)$ என்று குறிப்பது வழக்கம் என்று கூறியுள்ளோம்.

$\therefore$ $x = x_1$ என்ற மதிப்பில் xஐப் பற்றிய yஇன் மாறு வீதம், $\frac{dy}{dx}$ இல் $x = x_1; y = y_1$ எனப் பிரதியிட்டுக் கிடைப்பதாகும் அல்லது $f^1(x_1)$ ஆகும்.

குறிப்பு : 'x' எனும் மாறியும் 'y' எனும் மாறியும் 't' எனும் தனி மாறியைச் சார்ந்தவையாகுக.

$$y = f(x) \text{ என்றால்}$$

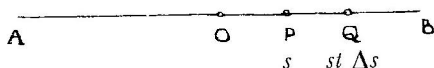
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx} f(x) \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x) \frac{dx}{dt}$$

x, y எனும் மாறிகளின் t ஐப் பற்றிய மாறுவீதங்களும், மேற்கூறிய சமன்பாடுகளும் தொடர்புடையனவாகும்.

3.2 நேர்கோட்டியக்க வேகமும் முடுக்கமும் :

AB என்ற நேர் கோட்டில் ஒரு துகளின் நிலை மாறுகிறது எனக் கொள்வோம். 't' என்ற நேரத்தில் துகளின் நிலை P ஆகுக. நேர்கோட்டில் O எனும் ஏதேனும் ஒரு மூலப்புள்ளி



படம் 3

யைக் கொண்டால், $OP = s$ எனும் தூரம் P இன் நிலையைத் t, நேரத்திற்குப் பிறகு Δt காலம் சென்றதும் துகளின் நிலை Q ஆகுக. OQ எனும் தூரம் $st\Delta s$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \Delta t \text{ நேரத்தில் இடப்பெயர்ச்சி} = \Delta s$$

துகளின் வேகம் என்பது $\underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ எனும் எல்லையாகும்.

வேகத்தை v எனக் குறித்தால் t நேரத்தில் $v = \frac{ds}{dt}$ என வருகிறது.

இதேபோல வேகமாறுதல் வீதம் முடுக்கம் (Acceleration) எனப்படும். முடுக்கம் f என்ருல்

$$f = \frac{dv}{dt} \text{ ஆகும்.}$$

$$f = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ எனவும் கூறலாம்.}$$

கணக்கு 1: நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் t நேரத்தில் உள்ள நிலை s எனும் தூரத்தால் தரப்படுகிறது. $s = 64t - 16t^2$ என்ருல் (i) t நேரத்தில் துகளின் வேகம் என்ன? (ii) அதன் முடுக்கம் என்ன? (iii) அதன் வேகம் எப்போது பூச்சியமாகிறது? (iv) அப்போது அதன் நிலை என்ன? (நேர அலகு விஞடி; தூர அலகு அடி எனக் கொள்க.)

$$s = 64t - 16t^2$$

(i) வேகம் $\quad v = \dfrac{ds}{dt} = 64 - 32\,t$ (அடி/விஞடி)

(ii) முடுக்கம் $\quad f = \dfrac{dv}{dt} = -32$ (அடி/விஞடி^{2})

(iii) t நேரத்தில் வேகம் $v = 64 - 32t$ ஆனதால் $v = 0$ என்ருல் $t = 2$ ஆகும்.

∴ நேரங் கணக்கிட ஆரம்பித்ததிலிருந்து 2 விஞடி நேரத்தில் அதன் வேகம் பூச்சியமாகும்.

(iv) அப்போது மூலப் புள்ளியிலிருந்து அதன் நிலை

$$t = 64 \times 2 - 16 \times 2^2$$
$$= 128 - 64 = 64 \text{ அடி.}$$

கணக்கு 2 : மேற்கூறிய கணக்கில் $s = 3\cos 2t + 4\sin 2t$ என்பது s ஐயும், t ஐயும் பிணைக்கும் சூத்திரமாஞல் முடுக்கம், s உடன் நேர்விகிதத்தில் மூலப்புள்ளியை நோக்கி அமையும் என நிறுவுக.

$$\text{வேகம் } v = \frac{ds}{dt} = -6\sin 2t + 8\cos 2t$$

$$\text{முடுக்கம் } f = \frac{dv}{dt} = -12\cos 2t - 16\sin 2t$$

$$= -4(3\cos 2t + 4\sin 2t)$$

$$\therefore \quad f = -4s$$

$\therefore$ $f \propto s$; fஉம், sஉம் எதிரெதிர்க் குறியுடையனவாத லால் முடுக்கம் மூலப் புள்ளியை நோக்கி இயக்கம் முழுவதிலும் அமையும்.

கணக்கு 3 : $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ எனும் சமன்பாடு தரும் இயக்கம் முதல் நான்கு விநாடிகளில் எவ்வாறு அமையும் எனக் காண்க.

வேகம் $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$

முடுக்கம் $f = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 = 6(t-2)$

முதலில் துகள் இடமிருந்து வலமாக நேர் கோட்டில் இயங்குகிறது எனக் கொள்வோம்.

A. வேகம்

(i) முதல் விநாடியில் v நேரெண்ணாகும். அந்த நேரத்தில் அது வலமாக நகர்கிறது.

(ii) அடுத்த இரண்டு விநாடிகளில் $1 < t < 3$, ஆனதால் v எதிரெண்ணாகும். துகள் இடமாக நகர்கிறது.

(iii) $t > 3$ எனும்போது, அதாவது மூன்ருவது விநாடிக்கு மேல் மீண்டும் வலமாக நகர்கிறது. அந்த இயக்கம் தொடர்கிறது.

B. முடுக்கம் :

முதல் இரண்டு விநாடிகளில் வேகத்தின் அளவு குறைந்து கொண்டே வருகிறது. இரண்டாவது விநாடியிலிருந்து வேகம் அதிகரித்துக் கொண்டே போகிறது.

கணக்கு 4: ஒரு கோள வடிவமுள்ள பலூனின் விட்டம் விநாடிக்கு 10 செ.மீ. அதிகரிக்கிறதென்ருல் விட்டம் 20 செ.மீ. ஆக இருக்கும்போது அதன் பரப்பளவின் மாறுவிகிதம் என்ன? கொள்ளளவின் மாறுவிகிதம் என்ன?

பரப்பு S, ஆரம் r, கொள்ளளவு V ஆகுக.

விட்டம் $x = 2r$ $\therefore \frac{dx}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$

ஆனல் $\frac{dx}{dt} = 10$ $\therefore \frac{dr}{dt} = 5$

(i) $S = 4\pi r^2$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

$r = 10$ செ. மீ; $\frac{dr}{dt} = 5$ செ.மீ./விநாடி

$\therefore \frac{ds}{dt} = 400\pi$ ச. செ.மீ./விநாடி

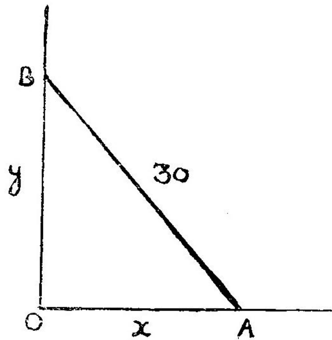
(ii) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$r = 10; \quad \frac{dr}{dt} = 5 \qquad \therefore \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi \times 100 \times 5$

$= 2000\pi$ க. செ.மீ./விநாடி

கணக்கு 5 : 30 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி ஒரு சுவற்றின் மேல் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் அடிப்பாகம் விநாடிக்கு 5 அடி வேகத்தில் சுவற்றின் அடியிலிருந்து விலகிப் போனால், சுவற்றிலிருந்து 18 அடி இருக்கும்போது அதன் மேல் பாகம் என்ன வேகத்தில் கீழே இறங்கும்?



படம் 4

AB என்பது ஏணி. அதன் நீளம் $= 30$ அடி.

OB என்பது சுவர்: OA என்பது தரை.

$OA = x\,; \qquad OB = y$ ஆகுக.

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 900$$

$$\therefore \quad 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \quad \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}$ என்பது அடிப்பாகம் விலகும் வேகம்.

$\frac{dy}{dt}$ என்பது மேல் பாகம் இறங்கும் வேகம்.

$x = 18$ என்றால் $y^2 = 900 - 18^2$

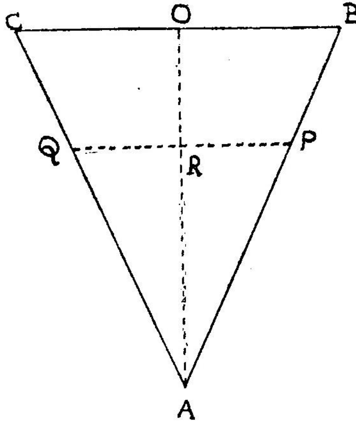
$$y = \sqrt{48 \times 12} = 24$$

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-18}{24} \times 5 = \frac{-90}{24} = \frac{-15}{4}$$

$\therefore$ இறங்கும் வேகம் $= 3\frac{3}{4}$ அடி/விநாடி.

கணக்கு 6: கூம்பு வடிவமான புனலில் (Funnel) திரவம் விநாடிக்கு 0·5 க.செ.மீ. வீதம் இறங்குகிறது. கூம்பின் உயரம் 10 செ.மீ; அடி விட்டம் 10 செ.மீ. என்றால் திரவத்தின் ஆழம்



படம் 5

8 செ.மீ. இருக்கும்போது திரவ மட்டம் என்ன வேகத்தில் இறங்குகிறது?

கொள்ளளவு $= V$

திரவப் பரப்பு ஆரம் $= r$

திரவ ஆழம் $= x$ ஆகுக

$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 x$

கொள்ளளவு குறைவதால் $\frac{dV}{dt}$ எதிரெண்ணுகும்.

$\therefore \quad \frac{dV}{dt}$ = திரவம் இறங்கும் வேகம் $= -\cdot 5$ க.செ.மீ./விஞடி

$\therefore \quad r = \frac{1}{2}x$ $\qquad = -\frac{1}{2}$ க.செ.மீ./விஞடி

$\frac{r}{x} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad V = \frac{1}{3}\pi \frac{x^3}{4} = \frac{1}{12}\pi x^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{12}\pi x^2 \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{4}x^2 \frac{dx}{dt}$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{4}{\pi x^2} \cdot \frac{dv}{dt}$; $\quad x = 8$ என்ருல்

$\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{\pi 64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{32\pi}$

திரவ மட்டம் விஞடிக்கு $\frac{1}{32\pi}$ செ.மீ. வீதம் இறங்குகிறது.

பயிற்சி 9

மூலப்புள்ளியிலிருந்து நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் தூரம் s க்கும் அப்போதைய நேரம் t க்கும் உள்ள தொடர்பு தரப்பட்டுள்ளது. $t = 0$, என்ருல் அப்போது அதன் வேகம் என்ன? முடுக்கம் என்ன? $v = 0$ ஆகும்போது நேரம் என்ன?

1. $s = 80t - 16t^2$

2. $s = t^2 + 2t - 3$

3. $s = t^3 - 6t^2 - 15t + 12$

4. $s = 3t + 5$

5. $s = t^3 - 3t^2 + 3t - 5$

6. நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் நிலை s க்கும் அப்போதைய நேரம் t க்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு $s = 5 \cos 3t + 3 \sin 3t$ என்ருல் அதன் முடுக்கம் s உடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளதெனவும், இயக்கம் முழுவதும் அது மூலப் புள்ளியை நோக்கியதெனவும் நிறுவுக.

7. கோள வடிவமான ஒரு குமிழின் ஆரம் $\frac{1}{2}$ அங். அந்த நேரத்தில் ஆரம் விஞடிக்கு 0·3 அங். வீதத்தில் அதிகமாகிறது. அதன் பரப்பளவு அப்போது என்ன வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது?

8. முனை கீழாகவும் அச்சு நேர் மேலாகவும் உள்ள ஒரு கூம்பு வடிவமான பாத்திரத்தில் விஞடிக்கு 150 க. செ.மீ. வீதத்தில் நீர் விழுகிறது. கூம்பின் உயரம் அதன் ஆரத்திற்குச் சமம் என்ருல் நீர் ஆழம் 20 செ.மீ. இருக்கும்போது நீர் மட்டம் என்ன வேகத்தில் உயர்கிறது?

9. தரை மட்டத்திலிருந்து 20 அடி உயரத்தில் ஒரு தெரு விளக்கு உள்ளது. 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவர் விளக்குக் கம்பத்திலிருந்து விஞடிக்கு 4 அடி வேகத்தில் போகிருர். கம்பத்திலிருந்து 15 அடி தூரத்தில் போகும்போது அவருடைய நிழல் என்ன வேகத்தில் வளர்கிறது?

10. 5 அடி உயரமுள்ள ஒருவர், 15 அடி உயரத்தில் தொங்கும் விளக்கின் அடியிலிருந்து விஞடிக்கு 5 அடி வேகத்தில் நடக்கிருர். 16 அடி நடந்ததும், அவருடைய நிழல் என்ன வேகத்தில் வளர்கிறது?

11. ஒரு கட்டடச் சுவரிலிருந்து தரைமட்டத்தில் 40 அடி தூரத்தில் ஒரு பிரகாசமான ஒளிர் விளக்கு (flood light) உள்ளது. 6 அடி உயரமுள்ள ஒருவர் விளக்கிலிருந்து கட்டடச் சுவற்றை நோக்கி விஞடிக்கு 4 அடி வேகத்தில் நடக்கிருர். சுவற்றிலிருந்து 18 அடி தூரத்தில் இருக்கும்போது அவருடைய நிழல் சுவற்றில் என்ன வேகத்தில் வளர்கிறது? (அல்லது குறைகிறது?)

12. ஒரு துகள் சென்ற தூரம், அதற்காகும் காலத்தின் வர்க்கமூலத்துடன் நேர்விகிதத்தில் இருக்கிறதென்ருல், அதன் முடுக்கம், வேகத்தின் முப்படியுடன் நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

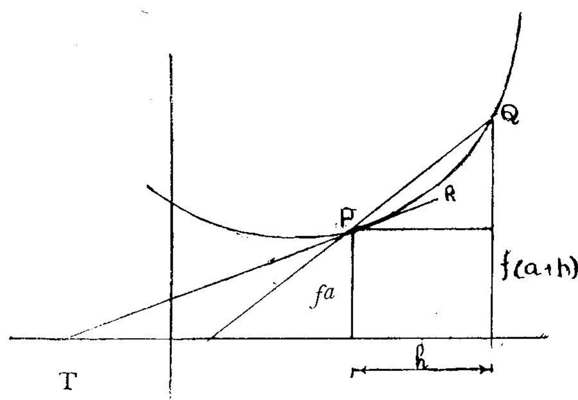
13. செல்லும் தூரத்தின் வர்க்கத்துடன், துகளின் வேகம் நேர்விகிதத்தில் இருந்தால், அதன் முடுக்கம் தூரத்தின் முப்படி (cube) யுடன் நேர்விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

14. $s = a + b \sin pt + c \cos pt$ என்றால், முடுக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்துள்ள தூரத்துடன் நேர்விகிதத்தில் அப்புள்ளியை நோக்கியிருக்கும் என நிறுவுக.

15. ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள இரு சாலைகளின் சந்திப்பை நோக்கிச் சாலைக்கொருவராக இரண்டு பேர் நடக்கிறார்கள். ஒருவர் வேகம் மணிக்கு 3 மைல். மற்றவருடைய வேகம் மணிக்கு 4 மைல். முதல்வர் 2 p.m. ஆகும்போது சந்திப்பைக் கடக்கிறார். மற்றவர் 2-30 p.m. க்குக் கடக்கிறார். (i) 1-45 p.m. ஆக இருக்கும்போது அவர்களிடையேயுள்ள தூரம் என்ன வீதத்தில் மாறுகிறது? (ii) 3 p.m. க்கு என்ன வீதத்தில் மாறுகிறது? [(i) 4·61 மைல் வீதத்தில் குறைகிறது? (ii) 4·715 மைல் வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது.]

3.3 வகைக்கெழுவின் வரைகணித விளக்கம் :
(Geometrical meaning of derivative)

$y = f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில் $P[a, f(a)]$ ஒரு புள்ளியாகுக.



படம் 6

Pஐ அடுத்து $Q[(a+h), f(a+h)]$ என்பது மற்றொரு புள்ளி.

அப்போது PQ எனும் நேர்கோட்டின் சரிவு

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h)-a}$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

PQ, வரையின் ஒரு நாண் (chord) ஆகும். $h \to 0$ ஆகும் போது Q எனும் புள்ளி P ஐ நெருங்குகிறது. அதாவது $Q \to P$. Pஐ நிலையாகக் கொண்டு $Q \to P$ ஆகும்போது வரும் பல நாண்கள் P, Q க்களின் எல்லை, Pஇல் அமையும் தொடு கோடெனப்படும். குறியீட்டில் $Q \to P$ ஆகும்போது $Lt\ PQ$ என்பது Pஇல் உள்ள தொடுகோடு TP ஆகும். அப்போது Pஇல் அமையும் தொடுகோட்டின் சரிவு

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

அதாவது $f'(x)$இன் $x=a$ எனும்போதுள்ள மதிப்பு ஆகும்.

$f(x)$ இன் வகைக்கெழு $f'(x)$ என்றால் $y=f(x)$ எனும் வளைவரைக்கு $x=a$ எனும் x கூறுடைய புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சரிவு $f'(a)$ எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 1: $y = f(x)$ எனும் வரையில், உள்ள புள்ளி களில் அமையும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகளை $f'(x)$ எனும் சார்பலன் தருகிறது.

குறிப்பு 2: வளைவரையில் உள்ள புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சரிவே வளைவரையின் சரிவு எனவும் கூறப்படுகிறது. $y = f(x)$ எனும் சமன்பாடுடைய வளைவரை யின் சரிவை $f'(x)$ எனும் முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சார் பலன் தருகிறது.

குறிப்பு 3 : $f'(x)=0$ எனும்படியுள்ள புள்ளிகளில் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாகும்.

3.4 மாற்று முறை விளக்கம் : $y= f(x)$ எனும் வளை வரையில் $P(x_1, y_1)$ என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. அதே வரை

யில் Pஐ அடுத்து $Q(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$ என்பது இன்னொரு புள்ளி யாகுக.

$$\therefore \quad y_1 = f(x_1)$$
$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1)$$
$$PQ \text{ இன் சரிவு } = \frac{(y_1 + \Delta y) - y_1}{(x_1 + \Delta x) - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pஐ நிலையாகக் கொள்வோம். $Q \to P$ ஆகுக. அப்போது $Lt\ PQ = P$இல் அமையும் தொடுகோடு. $Q \to P$ ஆகும்போது $\Delta x \to 0$ ஆகும்.

$\therefore$ வளைவரைக்கு $P(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளியில் அமையும்

$$\text{தொடுகோட்டின் சரிவு} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \frac{dy}{dx}$$

என்பதன் (x_1, y_1) என்ற இடத்தில் உள்ள மதிப்பு.

$\therefore y = f(x)$ எனும் வளைவரைக்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டின் சரிவு, $\frac{dy}{dx}$ எனும் வகைக்கெழுவில் x க்கு x_1 எனவும், yக்கு y_1 எனவும் பிரதியிட்டு வரும் மதிப்பு ஆகும்.

[(x_1, y_1) இல் உள்ள $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு ஆகும்.]

குறிப்பு : உட்படு சார்பலன் சமன்பாட்டில் இது மிகவும் பயன்படும்.

கணக்கு : $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 1$, $x = 6$, $x = 5$ என்ற புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகளைக் காண்க.

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x - 15$$
$$= 3(x-5)(x+1)$$

$\therefore$ வளைவரையின் சரிவைத் தரும் சார்பலன்

$$f'(x) = 3(x-5)(x+1)$$

$x=1$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= f'(1) = 3(-4)(2) = -24$

$x=6$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= f'(6) = 3\times(1)\times(7) = 21$

$x=5$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= f'(5) = 3\times(0)\times(6) = 0$

கணக்கு 2 : $y = 3x^2-4x+1$ என்ற வரைக்கு $x=1$, $x = \frac{1}{3}$ என்ற புள்ளிகளில் உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $x=1$ எனும் x கூறுடைய புள்ளியின் y கூறைக் காண

$$y = 3.1 - 4.1 + 1 = 0$$

$\therefore$ (1, 0) என்பது வளைவரையில் உள்ள புள்ளி.

சரிவு $= \frac{dy}{dx} = 6x - 4$

$\therefore$ (1, 0)இல் சரிவு $= 6 - 4 = 2$

$\therefore$ (1, 0) வழி '2' எனும் சரிவுடைய கோட்டின் சமன்பாடு $2x-y = 2$

(ii) $x = \frac{1}{3}$ எனும் x கூறுடைய புள்ளியின் y கூறைக் காண,

$$y = 3.\tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{3} + 1 = 0$$

$\therefore$ $(\frac{1}{3}, 0)$ என்பது வளைவரையில் உள்ள புள்ளி.

சரிவு $= \frac{dy}{dx} = 6x - 4$

$\therefore$ $(\frac{1}{3}, 0)$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $= \frac{6}{3} - 4 = -2$

$\therefore$ $(\frac{1}{3}, 0)$ வழி -2 எனும் சரிவுடைய கோட்டின் (தொடுகோடு) சமன்பாடு=

$$2x + y = \tfrac{2}{3}$$

அதாவது $6x + 3y = 2$

கணக்கு 3: $x^2-3xy+y^2 = 19$ எனும் சமன்பாட்டுடைய வளைவரைக்கு $(-3, 1)$ எனும் புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடு, குத்துக்கோடு இவற்றின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[இது உட்படுச் சார்பலன் சமன்பாடு என்பதைக் கவனிக்கவும்.]

விடை : (—3, 1) எனும் புள்ளி வளைவரையில் அமைகிற தென்பதைப் பிரதியிட்டுக் காணலாம்.

வளைவரையின் சரிவு $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு ஆகும்.

$$x^2 - 3xy + y^2 = 19$$

x ஐப் பற்றி வகைக்கெழு காண

$$2x - 3\left(x \frac{dy}{dx} + y \right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

(—3, 1)இல் சரிவு x க்கு —3 எனவும், y க்கு 1 எனவும் பிரதியிட்டுக் கிடைக்க வரும் $\frac{dy}{dx}$ இன் மதிப்பு m ஆகும்.

$$\therefore \quad -6 - 3(-3m+1) + 2m = 0$$
$$-6+9m - 3 + 2m = 0$$
$$11m = 9$$

தொடுகோட்டின் சரிவு $m = \frac{9}{11}$

$\therefore$ அதன் சமன்பாடு ; சரிவு= $\frac{9}{11}$, புள்ளி (—3, 1) ஆனதால் $9x - 11y = -27 - 11$

$$\therefore \quad 9x - 11y + 38 = 0$$

(—3, 1) வழி இதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டின் சமன்பாடு $11x + 9y = -33 + 9$

$$11x + 9y + 24 = 0$$

3.5 கணக்கு 1 : $y = x^3 - x$ எனும் வளைவரையும்
$y = x^2 - 1$ எனும் வளைவரையும் எந்தெந்தக் கோணங்களில் வெட்டுகின்றன என்பதைக் காண்க.

[வரைகளிடையேயுள்ள கோணம் (angle between two curves) : இரண்டு வளைவரைகளிடையேயுள்ள கோணம், அவைகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளில் அவைகளுக்கு அமையும் தொடுகோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணமாகும். ஆகவே

(i) வளைவரைகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் காண்க. இரு சமன்பாடுகளை ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு விடுவிக்க, பொதுப்புள்ளிகளின் கூறுகளைக் காணலாம்.

(ii) ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளைவரைகளின் சரிவுகளைக் காண்க. அவை முறையே m_1, m_2 ஆகுக.

(iii) தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் முறையே m_1, m_2 ஆகும். அவைகளிடையேயுள்ள கோணம் 'θ' என்றால்

$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. இதன் நேரெண்மதிப்பைக் கொண்டால் θ குறுங்கோணமாகும்.

(iv) $m_1 m_2 = -1$ என்றால் $\theta = 90°$ வளைவரைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்து (orthogonal) எனப்படும்.]

விடை : (i) பொதுப்புள்ளிகளைக் காண

$$y = x^3 - x$$
$$y = x^2 - 1$$
$$\therefore \quad x^3 - x = x^2 - 1$$
$$\therefore \quad x(x^2 - 1) = x^2 - 1 \qquad \therefore \quad x^2 - 1 = 0 \text{ அல்லது } Fx = 1$$
$$\therefore \quad x = 1, -1, \ 1$$
$$\therefore \quad x = 1, 1, -1$$
$$y = 0, 0, \ 0$$

$\therefore$ பொதுப்புள்ளிகள் $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$

(ii) முதல் வளைவரையின் சரிவு $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$

$\therefore$ $(-1, 0)$ என்ற புள்ளியில் சரிவு $m_1 = 3 - 1 = 2$

இரண்டாவது வரையின் சரிவு $\frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ $(-1, 0)$ என்ற புள்ளியில் அதன் சரிவு $m_2 = -2$

$\therefore$ அவைகளிடையேயுள்ள கோணம் θ ஆனால்

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

குறுங்கோணத்தைக் கொண்டால் $\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53°$

(iii) $(1, 0)$ என்ற பொதுப்புள்ளியில்

முதல் வளைவரையின் சரிவு $= 2 \ (m_1)$

இரண்டாவது வளைவரையின் சரிவு $= 2\ (m_2)$

$\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0$; இரண்டு தொடு கோடுகளும் ஒன்றே.

வளைவரைகள் ஒன்றையொன்று (1, 0) என்ற புள்ளியில் தொடுகின்றன எனப்படும், [ஒரே தொடுகோடு, ஒரே சரிவு உடையன.]

கணக்கு 2: $x^2 + y^2 = 25$

$3x - 4y = 0$ என்ற வரைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்து எனக் காண்க.

(i) **சமன்பாடுகளை விடுவிக்க :**

$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 = 25$$

$$\therefore \quad 25x^2 = 400$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4,\ -4$$

$$\therefore \quad y = 3,\ -3$$

$\therefore$ பொதுப்புள்ளிகள் (4, 3), (−4, −3) ஆகும்.

(ii) முதல் வரையின் சரிவு

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$\therefore$ (4, 3) இல் முதல் வரையின் சரிவு $m_1 = -\frac{4}{3}$

இரண்டாவது வரையின் சரிவு

$$3 - 4\frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ (4, 3) இல் அதன் சரிவு $m_2 = \frac{3}{4}$

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -\tfrac{4}{3} \times \tfrac{3}{4} = -1$$

$\therefore$ இரண்டு வரைகளும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

[குறிப்பு : முதல் வரை, (0, 0)ஐ மையமாகவுடைய வட்டம் ஆகும். இரண்டாவது வரை (0, 0) வழிச் செல்லும் நேர்கோடாகும். மையம் வழிச் செல்வதால் வட்டத்தின்

விட்டமாகும். நேர்கோட்டிற்கு, அதன் எல்லாப் புள்ளிகளி லும் சரிவு ஒன்றே தான். அதுவே அதன் தொடுகோடாகும் விட்டம் வட்டத்தை வெட்டுமிடத்து வட்டத்திற்குள்ள தொடு கோடு விட்டத்திற்குக் குத்து என்பதை அறிவோம். அதாவது வட்டமும் அதன் விட்டமும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும் என இவ்வாறு வரைகணிதம் வழியாய் மேற்கணக்கிற்கு நிரூபணம் சொல்லலாம்.]

பயிற்சி 10

கீழே சில வளைவரைகளின் சமன்பாடுகள் தரப்பட் டுள்ளன. அவற்றிற்குப் பக்கத்தில் தரப்படும் புள்ளிகளில், வரைகளுக்கு அமையும் தொடுகோடு (tangent), குத்துக்கோடு (normal) இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

1. $y=4x-x^2$, $(4, 0)$
2. $3y=3-x+x^2$, $(-2, -1)$
3. $y=x+2x^2+x^3$, $(1, 4)$
4. $y=(2x-3)^2$, $(3, 9)$
5. $(x-1)^2+y^2=13$, $(-2, -2)$
6. $x^2+y^3=25$, $(3, -4)$
7. $x^3-xy^2+y=3$, $(3, 3)$

8. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ என்ற வரைக்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளி யில் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

கீழே தரப்பட்டுள்ள இரண்டிரண்டு வரைகளிடையே யுள்ள கோணங்களின் டான்ஜண்டு விகிதங்களைக் காணவும்.

9. $y=x^2-6$; $y=x$
10. $y^2=x$; $x+3y=10$
11. $x^2+y^2=8$; $y^2=2x$
12. $y^2=4x$; $x^2=4y$
13. $2x^2+3y^2=20$; $xy-4=0$

14. $y=x^3$; $6y=7-x^2$ எனும் வரைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்து என நிறுவுக.

15. $xy^2=(x+y)^2$ எனும் வரையை $x=c$ எனும் கோடு குத் தாக வெட்டினால் c இன் மதிப்பு என்ன?

3.6 சார்பலனின் ஏற்றத்தாழ்வுகள் :

$f(x)$ எனும், xஐப் பற்றிய சார்பலனின் மதிப்பு, xஇன் மதிப்புடன் மாறும். a என்ற மதிப்பிலிருந்து b எனும் மதிப்புக்கு $(b>a)$, x இன் மதிப்பு அதிகமாகிக் கொண்டே வந்தால்

$f(x)$இன் மதிப்பும் ஏறுகிறதா அல்லது இறங்குகிறதா என்பதை அதன் வகைக்கெழு $f'(x)$ இலிருந்து அறியலாம். அதைக் காணும் முறையைக் கீழே தருவோம்.

$x=a$ என்ற மதிப்பு இருக்கும்போது $f(x)$இன் மதிப்பு $f(a)$; a இலிருந்து x இன் மதிப்பு இன்னும் h அதிகமாகட்டும். (h நேரெண்) அதாவது x இன் மதிப்பு $a+h$ ஆகிறது. அப்போது சார்பலனின் மதிப்பு $f(a+h)$. சார்பலனில் ஏற்படும் மாறுதல் $f(a+h) - f(a)$. $x=a$ என்ற இடத்தில், $f(x)$இன் வகைக்கெழு

வின் மதிப்பு $f'(a) = \underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ஆகும்.

(i) $f(x)$ அந்த இடத்தில் ஏறுமுகமாயிருந்தால், $f(a+h) -f(a)$ நேரெண்ணாகும். $\therefore$ $f'(a)$ நேரெண்ணாகும்.

(ii) $f(x)$ அந்த இடத்தில் இறங்குமுகமாயின் $f(a+h)-f(a)$ எனும் மாறுதல் எதிரெண்ணாகும். $\therefore$ $f'(a)$ எதிரெண்ணாகும்.

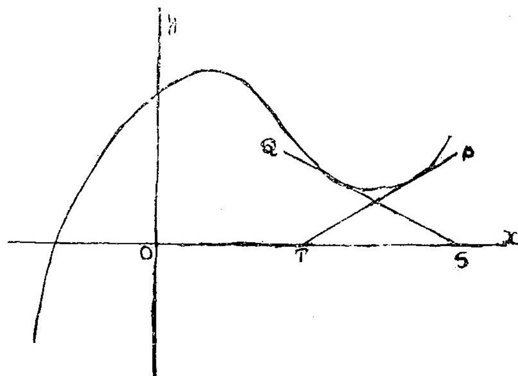
இவ்வாறு $x=a$ என்ற இடத்தில் $f(x)$ ஏறுமுகமா அல்லது இறங்குமுகமா என்பதை அதன் வகைக்கெழுவிற்கு அந்த இடத்தில் உள்ள குறியால் உணரலாம்.

குறிப்பு : $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் (interval) (அதாவது $x=a$ இலிருந்து $x=b$ வரை எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்) $f'(x)$இன் குறி நேரெண்ணானல், அந்த இடைவெளியில் $f(x)$, வளர் சார்பலன் (increasing function) ஆகும். எதிரெண்ணானல் அந்த இடைவெளியில் $f(x)$, குறையுஞ் சார்பலன் (decreasing function) ஆகும்.

3.7 மேற்கூறியதன் வரைபட விளக்கம் :

$y=f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் அடுத்த பக்கத்தில் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. $x=a$ எனும் x கூறுடைய புள்ளி, வரையில் P ஆகுக. அங்கு $f(x)$ ஏறுமுகமானல் அங்குள்ள தொடுகோடு TP, x அச்சுடன் குறுங்கோணம் ஏற்

படுத்தும். சரிவு நேரெண்ணாகும். ஆகையால் $f\ (x)$ இன் வகைக்கெழுவாகிய $f'\ (x)$ இன் அங்குள்ள மதிப்பு நேரெண்ணாகும்.



படம் 7

Q எனும் இடத்தில், $f\ (x)$ இறங்கு முகமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது. அங்கு, தொடுகோடு SQ, x அச்சுடன் விரிகோணம் $(>90°)$ ஏற்படுத்தும். ஆகையால் சரிவு எதிர் எண்ணாகும். $(\tan \theta, -ve)$. $f\ (x)$இன் வகைக்கெழுவாகிய $f'\ (x)$இன் அங்குள்ள மதிப்பு எதிரெண்ணாகும்.

குறிப்பு (i) : xஇன் மதிப்பு எந்த இடைவெளியிலாவது தொடர்ந்தேற, அங்கெல்லாம் தொடுகோடு x அச்சுடன் குறுங்கோணத்தில் இருந்தால், $f'\ (x)$ அங்கெல்லாம் நேரெண்ணாகும். $f\ (x)$ உம் அந்த இடைவெளியில் வளர் சார்பலனாகும்.

(ii) எங்கெல்லாம் தொடுகோடு தொடர்ந்து விரிகோணத்தில் இருக்கிறதோ அந்த இடைவெளியில் $f'\ (x)$இன் மதிப்பு எதிரெண்ணாகும். $f\ (x)$ குறையும் சார்பலனாகும்.

கணக்கு 1 : $f\ (x) = x^2 - 4x - 5$ என்ற சார்பலனின் ஏற்றத் தாழ்வுகள் $-10 \leq x \leq 10$ என்ற இடைவெளியில் எவ்வாறுள்ளன?

$$f\ (x)\text{இன் வகைக்கெழு } f'\ (x) = 2x - 4$$
$$= 2\ (x-2)$$

(i) $x<4$ எனில் வகைக்கெழு $f'(x)$ எதிரெண்ணுகும். $\therefore$ $-10\leq x<4$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ குறையும் சார் பலனுகும். xஇன் மதிப்பு 4 ஐ அணுகும்தோறும் $f(x)$இன் மதிப்பு குறைகிறது.

(ii) $x>4$ எனில் $f'(x)$ நேரெண்ணுகும். $\therefore$ $4<x\leq 10$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வளர் சார்பலனுகும். xஇன் மதிப்பு 4க்குச் சற்றே அதிகமானதும் $f'(x)$ நேரெண் ஆகும். $f(x)$ ஏறு முகமாகிறது.

[**குறிப்பு :** $x=4$ என்ற இடத்தில் $f(x)$ இறங்குமுகத்தி லிருந்து ஏறுமுகமாகிறது. இந்நிலே, திரும்பும் நிலே (Turning point) எனப்படும். இங்கு $f'(x)=0$ எனக் காண்கிருேம். இதைப் பற்றிப் பின்னர் படிப்போம்.]

கணக்கு 2 : $5+4x-x^2$ என்ற சார்பலனின் ஏற்றத்தாழ்வு களேக் காண்க.

$$f(x) = 5+4x-x^2$$

$$\therefore \quad f'(x) = 4-2x$$

$$= 2(2-x)$$

(i) $x<2$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $f'(x)$ நேரெண்ணுகும். $\therefore$ $-\infty<x<2$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வளர் சார்பல னுகும்.

(ii) $x>2$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு $f'(x)$ எதிரெண்ணுகும். ஆகவே $2<x<\infty$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ குறையும் சார் பலனுகும். $x=2$ என்ற இடம் ஏறுமுகத்திலிருந்து இறங்கு முகத்திற்குத் திரும்பும் நிலேயாகும்.

கணக்கு 3 : $y=x^3-6x^2+9x-1$ என்ற சார்பலனின் வரை படம் எவ்வாறு அமையும் எனக் காண்க.

$$y = x^3-6x^2+9x-1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$$

(i) $x<1$ என்ருல் $(x-1)$ உம் $(x-3)$ உம் எதி ரெண்களாகும். அவற்றின் பெருக்கற் பலன் நேரெண் ணுகும். $\therefore$ $x<1$ எனும் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் (அதாவது

$-\infty < x < 1$ என்ற இடைவெளியில்) $f(x)$ வளர் சார்பலனுகும். $y = f(x)$ எனும் வரைக்கு இந்த இடைவெளியில் உள்ள தொடுகோடுகள் x அச்சுடன் குறுங்கோணத்தில் அமையும்.

(ii) $1 < x < 3$ என்ருல் $(x-1)$ நேரெண்; $(x-3)$ எதிரெண். அவற்றின் பெருக்கற்பலன் எதிரெண். இந்த இடைவெளியில் $f(x)$ குறையும் சார்பலன் ஆகும். தொடுகோடுகள் விரிகோணத்தில் x அச்சுடன் அமையும்.

(iii) $3 < x$ என்ருல் [அதாவது $3 < x < \infty$], $(x-1)$ உம் $(x-3)$ உம் நேரெண்கள். $\therefore$ $(x-1)(x-3)$ நேரெண். ஆகவே இந்த இடைவெளியில் மீண்டும் $f(x)$ தொடர்ந்து வளர் சார்பலனுகும்.

[(iv) $x=1$ என்பது ஒரு திரும்புந் நிலே; $x=3$ எனும் இடம் மற்ருெரு திரும்பும் நிலே. முன்னது ஏறி இறங்கும் இடம். பின்னது இறங்கி ஏறும் இடம். இவ்வாறு இருதரப்பட்ட திரும்பும் நிலேகளேக் காண்கிருேம்.]

கணக்கு 4 : $y = a \sin x$ என்ற சார்பலனின் ஏற்றத்தாழ்வுகளே $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் ஆராய்க.

$\frac{dy}{dx} = a \cos x$. a ஐ நேரெண்ணுகக் கொள்வோம்.

(i) $x = -\pi$ என்ருல் $\frac{dy}{dx} = -a$ எதிரெண்ணுகும். $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் $\frac{dy}{dx}$ எதிரெண்ணுகும். $\therefore a \sin x$ எனும் சார்பலன் இங்குக் குறையும் சார்பலன்.

(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ என்ற இடைவெளியில் $\frac{dy}{dx}$ நேரெண்.

$\therefore$ $a \sin x$ இங்கு வளரும் சார்பலன்.

(iii) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் மீண்டும் $\frac{dy}{dx}$ எதிரெண்ணுகும். ஆகவே $a \sin x$ இங்குக் குறையும் சார்பலனுகும்.

[குறிப்பு : $a \sin x$ இன் ஏற்றத்தாழ்வுகளையும், $y = a \sin x$ என்ற வரைபடத்தின் தன்மையையும் கோணகணிதத்தில் கண்டிருப்பீர்கள்.]

பயிற்சி 11

கீழ்வரும் சார்பலன்களின் ஏற்றத்தாழ்வுகளை ஆராய்க.

1. $y = x^2 - 4x - 5$
2. $y = 6 + x - x^2$
3. $y = x^2 - 3x - 4$
4. $y = 4 + 3x - x^2$
5. $y = x^4 - 18x^2$
6. $y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 7$
7. $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 1$
8. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$
9. $y = \dfrac{9}{x^2 + 3}$
10. $y = \dfrac{(x-2)^2}{x}$.

11. வளர் சார்பலன், குறையும் சார்பலன் இவற்றை உதாரணங்களால் விளக்குக. $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ எனும் சார்பலன் வளர் சார்பலனுக இருக்க அமையும் நியதிகளை ஆராய்க; அதுபோன்று குறைசார்பலனுக இருக்க அமையும் நியதிகளையும் ஆராய்க.

3.8 மீப்பெரு மதிப்பும் மீச்சிறு மதிப்பும் (Maximum and Minimum values)

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ எனும் சார்பலனின் ஏற்றத்தாழ்வுகள் எவ்வாறுள்ளன என ஆராய்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

மீப்பெரு நிலை :

(i) $x<1$ ஆகும் xஇன் மதிப்புக்களுக்கு $(x-1)$ $(x-3)$ நேரெண்ணுனதால் சார்பலன் வளர் சார்பலனுகும். $x=1-h$ என்ற இடத்தில் h எவ்வளவு சிறியதாயினும் சார்பலன் ஏறுமுக மாகும். [h நேர் எண்ணுகும்.] $f'(1-h)$ நேரெண்ணுகும்.

(ii) $1<x<3$ என்ற இடைவெளியில் $(x-1)$ நேரெண்; $(x-3)$ எதிரெண். ஆனதால் $(x-1)$ $(x-3)$ எதிரெண். ஆகையால் $x=1$ என்ற மதிப்பைத் தாண்டியதும், $f(x)$ குறையும் சார்பலனுகும். $x=1+h$ என்ற இடத்தில் h எவ்வளவு நுண்ணிய தாயினும் $f(x)$ இறங்குமுகம் ஆகும். $f'(1+h)$ எதிரெண் ணுகும்.

$x=1$ என்ற இடம், ஏறுமுகத்திலிருந்து சார்பலன் $f(x)$ இறங்குமுகத்திற்கு மாறும் அல்லது திரும்பும் நிலை எனக் காண் கிரும். அங்கு $f'(1)=0$. இவ்வாறு எங்குச் சார்பலனின் தன்மை ஏறுமுகத்திலிருந்து இறங்குமுகமாகத் திரும்புகிறதோ, அத்தகைய திரும்பு நிலை சார்பலனின் **மீப்பெரு நிலை** (maximum point) எனப்படும். அங்குள்ள சார்பலனின் மதிப்பு அதன் **மீப்பெரு மதிப்பு** (maximum value) எனப்படும்.

இந்த உதாரணத்தில் $x=1$ என்பது சார்பலனின் மீப் பெரு நிலை. மீப்பெரு மதிப்பு $= f(1)$

$$=1-6+9-1=3$$

மீச்சிறு நிலை :

(iii) $1<x<3$ என்ற இடைவெளியில் சார்பலன் இறங்கு முகமெனக் கண்டோம். ஆனதால் h எவ்வளவு சிறியதாயினும் $x=3-h$ என்ற இடத்தில் சார்பலன் இறங்குமுகமாகும்.

(iv) $3<x$ என்ற xஇன் மதிப்புக்களுக்கு $(x-1)$ $(x-3)$ நேரெண்ணுனதால் $f(x)$ வளர் சார்பலனுகும். ஆகையால் $x=3+h$ என்ற இடத்தில், h எத்தனை சிறியதாயினும், சார்பலன் ஏறுமுகமாகும்.

$x=3$ என்ற இடத்தில் $f(x)$, இறங்கு முகத்திலிருந்து ஏறு முகமாகத் திரும்புகிறது. இந்தத் திரும்பு நிலை சார்பலனின் **மீச்சிறு நிலை** (minimum point) எனப்படும். அங்குள்ள சார் பலனின் மதிப்பு, அதன் **மீச்சிறு மதிப்பு** (minimum value)

எனப்படும். இங்கு $x=3$ எனும் நிலை $f(x)$இன் மீச்சிறு நிலை. $f(3)=27-54+27-1=-1$ $\therefore$ சார்பலனின் மீச்சிறு மதிப்பு $=-1$.

இந்த ஓர் உதாரணத்தால், மீப்பெரு நிலை, மீப்பெரு மதிப்பு, மீச்சிறு நிலை, மீச்சிறு மதிப்பு—இவற்றை விளக்கினோம். பொதுப்படையாக ஒரு சார்பலனின் மீச்சிறு, மீப்பெரு நிலை, மதிப்பு ஆகியவற்றைக் காண விதிகள் யாவை எனக் கண்டறிவோம்.

3.9 வரையறை : (i) $x=a$ என்ற மதிப்புக்குச் சற்று முன் $f(x)$ ஏறுமுகமாகவும், அதற்குச் சற்றுப் பின் இறங்குமுகமாகவும் ஆனால் $x=a$ எனில் திரும்பு நிலை $f(x)$இன் மீப்பெரு நிலை எனவும் $f(a)$ என்பது அதன் மீப்பெரு மதிப்பு (maximum value) எனவும் பெயர் பெறும்.

(ii) $x=a$ என்ற மதிப்புக்குச் சற்று முன் $f(x)$ இறங்குமுகமாகவும், சற்றுப்பின் ஏறுமுகமாகவும் ஆனால் $x=a$ எனும் திரும்பும் நிலை $f(x)$இன் மீச்சிறு நிலை எனவும் $f(a)$ அதன் மீச்சிறு மதிப்பு (minimum value) எனவும் பெயர் பெறும்.

மேலே கூறியதைக் குறியீட்டில் சொல்வோம் ;

(i) $x=a$ என்ற இடத்தில், h எவ்வளவு சிறிய நேரெண்ணாயினும்,

$$f(a) > f(a-h)$$
$$f(a) > f(a+h)$$

என அமைந்தால் $f(a)$ என்பது $x=a$ என்ற நிலையில் $f(x)$இன் மீப்பெரு மதிப்பு எனப்படும்.

(ii) $x=a$ என்ற இடத்தில் h எவ்வளவு சிறியதாயினும்

$$f(a) < f(a-h)$$
$$f(a) < f(a+h)$$

என அமைந்தால் $f(a)$ என்பது x என்ற நிலையில் $f(x)$இன் மீச்சிறு மதிப்பு எனப்படும்.

3.10 மீப்பெரு மதிப்புக் காணும் விதி :

$f(a)$ என்பது $f(x)$இன் மீப்பெரு மதிப்பு ஆகுக. வரையறையின்படி $a-h<x<a$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ ஏறுமுகம். அதாவது $f(a)>f(a-h)$ $\therefore$ $f'(a-h)$ நேரெண்ணாகும்.

$a<x<a+h$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இறங்கு முகம். அதாவது $f(a+h)< f(a)$. $\therefore$ $f'(a+h)$ எதிரெண்ணாகும். $h\to 0$ ஆகும்போதும் இவை பொருந்தும். $\therefore$ $f'(a)=0$

ஏனெனில் $f'(x)$ இன் குறி $x=a-h$ இல் நேரெண்ணாகவும் $x=a+h$ இல் எதிரெண்ணாகவும் ஆனதால் $x=a$ என்ற நிலையில் $f'(x)=0$ ஆகிறது.

இரண்டாவதாக $f'(x)$இன் மதிப்பு $x=a$ என்ற இடத்தில் இறங்குமுகம்; [நேரெண்ணிலிருந்து எதிரெண்ணாவதால்] $\therefore$ அதன் வகைக்கெழு $f''(x)$ அங்கு எதிரெண்ணாகும். அதாவது $f''(a)$ எதிரெண்ணாகும்.

ஆகவே $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பாக வேண்டுமானால் $f'(a)=0$, $f''(a)=-ve$ என இருக்க வேண்டும். இவையே $f(x)$, மீப்பெரு நிலையை அடைவதற்குள்ள நியதிகளாகும்.

3.11 மீச்சிறு மதிப்புக் காண விதிகள் :

$f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பு ஆனால் வரையறையின்படி $a-h<x<a$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ இறங்குமுகமாகவும் $a<x<a+h$ என்ற இடைவெளியில் ஏறுமுகமாகவும் இருக்கவேண்டும். h என்பது $\to 0$ஆகும்போதும், இவை பொருந்த வேண்டும். $\therefore f'(a-h)$ எதிரெண். $f'(a+h)$ நேரெண். $\therefore (h\to 0$ஆவதால்$)$ $f'(a)=0$ ஆகவேண்டும்.

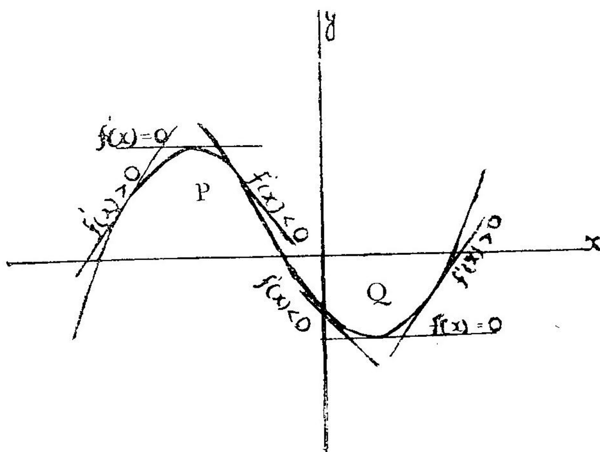
இரண்டாவதாக $f'(x)$இன் குறி எதிரெண்ணிலிருந்து நேரெண்ணுக்கு $x=a$ என்ற நிலையை அடுத்து மாறுவதால் $f'(x)$ ஏறுமுகமாகும். $\therefore f'(a)$ நேரெண்ணாகும்.

ஆகையால் $f(a)$ என்பது $f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பாக அமையவுள்ள நியதிகள் (i) $f'(a)=0$ (ii) $f''(a)=-ve$ என இருக்கவேண்டும்.

வரைபட நிருபணம்

$y=f(x)$ எனும் சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில், P எனும் நிலையில் சார்பலன் ஏறுமுகத்திலிருந்து இறங்குமுகமாகத் திருப்பட்டும். படத்திலிருந்து நாம் Pக்கு முன்னால்

தொடுகோடு x அச்சுடன் குறுங்கோணத்திலும், Pக்குப் பின்னர் விரிகோணத்திலும் அமைவதைக் காண்கிறோம். $\therefore$ Pஇல் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும். ஆகவே அதன் சரிவு மீப்பெரு நிலையில் பூச்சியம் ஆகும்.



படம் 8

$\therefore$ அங்கு $f'(x)=0$; இதேபோல மீச்சிறு நிலையாகிய Qவிலும் $f'(x) = 0$. $\therefore$ $f'(x) = 0$ எனும்படியுள்ள xஇன் மதிப்புக்கள் சார்பலனின் திரும்பு நிலைகளை, அதாவது மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு நிலையைத் தரும்.

(ii) மீச்சிறு நிலைக்கும், மீப்பெரு நிலைக்கும் உள்ள இரண்டாவது நியதியை முன்னர் கூறியது போலவே காணவும்.

கணக்கு 1 : $x^4 - 6x^2 + 8x + 11$ என்ற சார்பலனின் திரும்பும் நிலைகளை ஆராய்ந்து, மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக்களைக் காண்க.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 11$$

$$\therefore f'(x) = 4(x^3 - 3x + 2)$$

$$= 4(x + 2)\ (x-1)^2$$

$f'(x) = 0$ எனும்படியான xஇன் மதிப்புக்கள் $f(x)$இன் திரும்பு நிலைகளைத் தரும்.

$$\therefore (x + 2)\ (x-1)^2 = 0$$

$\therefore x = -2, 1, 1$

இவற்றை ஆராய்வோம்.

$$f''(x) = 4\{(x-1)^2 + 2(x+2)(x-1)\}$$

(i) $x = -2$ என்றால் $f''(2) = 4 \times 9 = 36 = +ve$

$\therefore x = -2$ என்பது மீச்சிறு நிலையைத் தரும்.

மீச்சிறு மதிப்பு $= f(-2) = 16 - 24 - 16 + 11 = -13$.

(ii) $x = 1$ என்றால் $f''(1) = 4\{0 + 0\}$; $f''(1) = 0$ இது நம் பாடத் திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது. $f''(x)$ நேரெண்ணாகவோ, அல்லது எதிரெண்ணாகவோ அன்றி பூச்சியமோ ஆனால் சார்பலனின் தன்மை என்ன, அதன் வரைபடம் என்ன என்பது விரிவான வகை நுண் கணிதத்தில் ஆராயப்படும்.

கணக்கு 2: $y = x^4 - 8x^2 + 12$ என்ற சார்பலனின் திரும்பு நிலைகளை ஆராய்க.

திரும்பு நிலைகளைக் காண

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x = 0$$

$$\therefore x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2; \; x = 0$$

$\therefore x = -2, 0, 2$ என்ற மதிப்புக்களில் சார்பலனின் திரும்பு நிலைகள் வரும்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 16$$

(i) $x = -2$ என்ற இடத்து $\frac{d^2y}{dx^2} = 48 - 16 = 32$;

நேரெண்ணாகும்.

$\therefore x = -2$ என்பது மீச்சிறு நிலை.

$\therefore$ மீச்சிறு மதிப்பு $= 16 - 32 + 12 = -4$

(ii) $x = 0$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2} = -ve$ ஆகும்.

$x = 0$ எனும் மதிப்பு மீப்பெரு நிலையைத் தரும்.

மீப்பெருமதிப்பு $x=0$ எனப் பிரதியிட வரும்.

$y = 12$ என்பது மீப்பெரு மதிப்பு.

(iii) $x=2$ என்பது (i) ஆவதைப்போல் மீச்சிறு நிலையைத் தரும். மீச்சிறு மதிப்பு அங்கும் -4 ஆகும்.

குறிப்பு : சார்பலன் இடையறுது தொடர் சார்பலனுனல் மீச்சிறு மதிப்பும், மீப்பெரு மதிப்பும், மாறி மாறி வரும். இதைப் பயன்படுத்தி $x = 0$ என்பது, மீப்பெரு நிலை எனக் கண்டதும் $x = -1$ என்பதும், $x = +2$ என்பதும் மீச்சிறு நிலைகள் என்று உடனே கூறலாம்.

கணக்கு : $\sqrt{3}\cos x + \sin x$ எனும் சார்பலனின் ஏற்றத் தாழ்வுகளையும், மீப்பெரு, மீச்சிறு நிலைகளையும் ஆராய்க.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$\therefore f'(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$\therefore \tan x = \tfrac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6},\quad \pi + \frac{\pi}{6},\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\cos x - \sin x$$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -ve$ $\qquad x = \frac{\pi}{6}$ மீப்பெருநிலை.

(i) $\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ என்பது மீப்பெரு மதிப்பு.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$\therefore \pi + \frac{\pi}{6}$ என்பது மீச்சிறு நிலை.

(ii) $f\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ என்பது மீச்சிறு மதிப்பு.

$$f\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

$0 < x < 2\pi$ என்ற இடைவெளியில்

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வளர் சார்பலன்;

$\frac{\pi}{3} < x < \pi + \frac{\pi}{6}$ என்ற இடைவெளியில் குறை சார்பலன்;

$\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2\pi$ என்ற இடைவெளியில் வளர் சார்பலன்.

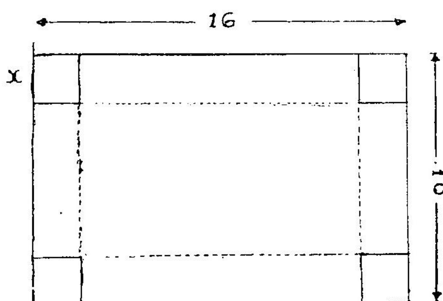
[இதுவே மீண்டும் மீண்டும் வரும்.]

3.12 மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புகளைப் பயன்படுத்திய உத்திக் கணக்குகள் (Problems involving maxima and minima)

கணக்கு 1 : செவ்வக வடிவமுள்ள ஓர் அட்டைத் துண்டின் நீளம் 16 செ.மீ. அகலம் 10 செ.மீ. அதன் மூலைகளிலிருந்து சமச்சதுரங்களை வெட்டி எடுத்து பக்கங்களை மடித்து ஒரு திறந்த செவ்வகத் தட்டு செய்யப்படுகிறது. அது மிகவும் அதிகக் கொள்ளளவுள்ளதாக அமைய வேண்டுமாயின், வெட்டப்பட்ட சதுரங்களின் நீளமென்ன?

[கணக்கை ஆராய்தல் : இங்கு செவ்வகப் பெட்டியின் கொள்ளளவு (V) மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டும். வெட்டப்பட்டுள்ள சதுரத்தின் நீளத்தின் (x) சார்பலனாக Vஐ முதலில் கூறவேண்டும். பிறகு Vயின் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண வேண்டும்.]

வெட்டின சதுரத்தின் நீளம் x செ.மீ.



படம் 9

$\therefore$ அட்டைப்பெட்டியின் நீளம் $16-2x$ செ.மீ.

அகலம் $10-2x$ செ.மீ.

உயரம் x செ.மீ.

$\therefore$ கொள்ளளவு $V = x\,(16-2x)\,(10-2x)$

$$= 4x\,(8-x)\,(5-x)$$

$$= 4\,[40x-13x^2+x^3]$$ க.செ.மீ.

[இவ்வாறு Vஐ x இன் பொதுச் சார்பலனுகக் கண்டோம்.

Vஇன் மீப்பெரு மதிப்புக் காண,

$\frac{dV}{dx} = 0$ எனும்படியுள்ள xஇன் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$$\therefore \quad 40-26x+3x^2=0$$

$$(x-2)\,(3x-20)=0$$

$\therefore$ $x = 2$ அல்லது $\frac{20}{3}$

$x = \frac{20}{3}$ என்ருல் $2x = \frac{40}{3}$; அட்டையில் வெட்டுவதற்கே இடமில்லே.

$\therefore$ $x=2$ என்பதே மீப்பெரு மதிப்பு.

$\therefore$ அட்டையில் 2 செ.மீ. நீளமுள்ள சதுரங்களே வெட்டிச் செய்யும் பெட்டி மிக அதிகக் கொள்ளளவுள்ளதாக இருக்கும்.

$$V = 4\,[80-52+8]$$

$$= 4\times 36$$

கொள்ளளவு $= 144$ க.செ.மீ.

[குறிப்பு : உத்திக் கணக்குகளில் மேற்கூறியது போல் மீப்பெரு மதிப்பு எது, மீச்சிறு மதிப்பு எது எனத் திரும்பும் நிலே கண்டதும் காணலாம். $\frac{d^2V}{dx^2}$ கண்டு அது எதிரெண் என நிறுவத் தேவையில்லே].

கணக்கு 2 : (i) இருபுறமும் மூடியுள்ள ஒரு நேர்வட்ட உருளே வடிவமான கலன் ஒரு குறிப்பிட்ட கொள்ளளவுள்ளதாகும். அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு மிகவும் குறைவாக இருக்க வேண்டுமானுல், அதன் விட்டத்திற்கும் உயரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் என்ன? (ii) அதே கலன் மூடியற்றதானுல் விகிதம் என்ன?

[இங்குக் கொள்ளளவு தரப்பட்டுள்ளது. புறப்பரப்பளவு மாறுகிறது. அதை உயரத்தின் சார்பலனுகவோ அல்லது ஆரத்தின் சார்பலனுகவோ கூறவேண்டும்].

உருளையின் ஆரம் r ஆகுக.

அதன் உயரம் h ஆகுக.

$\therefore$ கொள்ளளவு $V = \pi r^2 h$ (i)

புறப்பரப்பளவு $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

S இன் மீப்பெரு நிலையில் $\frac{ds}{dr} = 0$

$$\therefore \quad 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$2\pi r^3 = V = \pi r^2 h$$

$\therefore$ $r = 0$ அல்லது $2r = h$

$r = 0$ பொருந்தாது.

$\therefore$ S மீச்சிறு மதிப்பாகும்போது **விட்டம் உயரத்திற்குச் சமம்** என வருகிறது.

(ii) மூடியில்லாத கலன் ஆனல்

$$S = \pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$\therefore$ $\frac{ds}{dr} = 0$ எனில் $2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$

$$\therefore \quad \pi r^3 = V = \pi r^2 h$$

$\therefore$ $r = 0$ அல்லது $r = h$

$\therefore$ உயரம் **விட்டத்தில் பாதியாகும்.**

[குறிப்பு : நீர் நிரப்பும் தொட்டியின் உயரம், அதன் விட்டத்தில் பாதியானல் மிக அதிக நீர் நிரப்பலாம்].

கணக்கு 3 : செவ்வகவடிவமான உத்திரத்தின் (Beam) வலிமை (தாங்கும் சக்தி) அதன் அகலம், கனத்தின் வர்க்கம் இவற்றின் பெருக்கற்பலனுடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளது.

'a' விட்டமுடைய வட்ட உருளைக் கட்டையிலிருந்து செதுக்கப் படும் மிகவும் வன்மையுள்ள உத்திரத்தின் அகலத்திற்கும் கனத்திற்குமுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

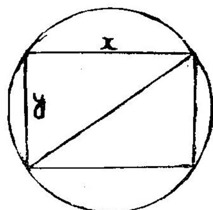
அகலம் x ; கனம் y ; வலிமை S

என்ருல் $S = Rxy^2$ [R நிலை எண்]

$x^2 + y^2 = a^2$

S மிகவும் அதிக மதிப்பாக இருக்க

$$\frac{ds}{dx} = 0 \text{ ஆக வேண்டும்.}$$



படம் 10

ஆனல் $S = Rx(a^2 - x^2)$

$= \text{R}\ (a^2x - 2x^3)$

$$\frac{ds}{dx} = R(a^2 - 3x^2) = 0$$

$$\therefore\ 3x^2 = a^2 \quad \therefore x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{2a^2}{3} \quad y = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = \sqrt{2} \qquad x : y = 1 : \sqrt{2}$$

அகலம் : கனம் = $1 : \sqrt{2}$ எனும் விகிதம்.

பயிற்சி 12

கீழ்வரும் சார்பலன்களின் திரும்புநிலைகளைக் கண்டு மீப் பெரு, மீச்சிறுநிலைகளை ஆராய்க. மீப்பெரு, மீச்சிறு மதிப்புக் களைக் கணக்கிடுக.

1. $x^2 - 6x + 8$
2. $16 - 6x - 3x^2$
3. $5x^2 - 4x - 1$
4. $x^3 - 12x + 5$
5. $2x^3 - 15x^2 + 36x$
6. $x^4 - 4x^3 + 13$
7. $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$
8. $x^3(x-1)^3$
9. $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$
10. $\dfrac{x(x+3)}{(x-1)}$

11. $\frac{(4-x)^3}{2-x}$ 12. $\sin x+\cos x$

13. $\tan x-8\sin x$ 14. $\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

B

உத்திக் கணக்குகள்

1. இரண்டு எண்களின் பெருக்குத் தொகை தரப் பட்டுள்ளது. அவற்றின் கூடுதல் மிகக் குறைவாக இருக்க வேண்டுமாயின், அவை சமமாக இருக்க வேண்டுமெனக் காண்க.

2. ஒரு குறிப்பிட்ட நீளமுள்ள கம்பியால் மிக அதிகப் பரப்பை உள்ளடக்கும் செவ்வகம் உண்டாக்கினால், அது சதுரமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

3. ஒரு செவ்வகத் தொட்டியின் அடிப்பாகம் சதுரமானது. அது $13\frac{1}{2}$ க. அடி கொள்ளளவுள்ள தொட்டியாகவும் இருக்க வேண்டும். அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு மீச்சிறியதாக இருக்க வேண்டுமெனின் அதன் உயரம் என்ன? அடிப்பக்க அகல மென்ன?

4. ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரமுள்ள கோளத்திலிருந்து மிக அதிகப் பருமன் உள்ள நேர்வட்ட உருளையைச் செதுக்க வேண்டுமாயின், உருளையின் உயரமும் ஆரமும் $\sqrt{2}:1$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும் எனக் காண்க.

5. இரண்டு எண்களின் கூடுதல் 40. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறிதாக இருக்க எண்கள் எவையா யிருக்கவேண்டும்?

6. இரண்டு எண்களின் வித்தியாசம் 100. பெரிய எண்ணின் வர்க்கம், சிறிய எண்ணின் வர்க்கத்தின் ஐந்து மடங்கைவிட உள்ள அதிகம் மிகக்குறைவாக இருக்கவேண்டு மாயின், எண்கள் யாவையாக இருக்க வேண்டும்?

7. இரு சாலைகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாக உள்ளன. ஒரு வண்டி சாலை சந்திப்பில் ஒரு சாலை வழி செல்லும்போது, சந்திப்பிலிருந்து $2\frac{1}{2}$ மைல் தூரத்தில் மற்றச் சாலையில்

இன்னொரு வண்டி சந்திப்பை நோக்கி வருகிறது. அவற்றின் வேகங்கள் முறையே மணிக்கு 20 மைல், 15 மைல் என்ருல், வண்டிகளுக்கிடையேயுள்ள மிகச் சிறிய தூரம் என்ன ?

8. (8, 2) என்ற புள்ளி வழி உள்ள ஒரு நேர்கோடு OX எனும் அச்சை Pஇலும் OY எனும் குத்தச்சை Qஇலும் வெட்டுகிறது. $OP+OQ$ எனும் கூடுதல் குறைவாக இருக்க வேண்டுமாயின், அதன் சரிவு என்ன ?

9. ஒருவட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவு Pஆகும். அதன் பரப்பு மிக அதிகமாக இருக்க, வட்ட வில் ஆரத்தைப்போல் இரு மடங்கு நீளமுள்ளதாக இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

10. ஒரு கோளத்திலிருந்து ஒரு கூம்பு வெட்டி எடுக்கப் படவேண்டும். அதன் முனை கோள மையத்திலும் அடிப்பக்கம் கோளப் பரப்பிலும் இருக்கவேண்டும். இவ்வாறு அமையும் மிக அதிகப் பருமனுள்ள கூம்பின் பருமன், கோளத்தின் பருமனில் $\frac{\sqrt{3}}{18}$ பாகம் இருக்கும் எனக் காண்க.

11. ஒரு சன்னல் கண்ணுடி செவ்வகத்தின்மேல் சமபக்க முக்கோணம் அமைந்த வடிவில் இருக்கவேண்டும். அதன் சுற்றளவு 16 அடி. அதன் பரப்பு மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டுமெனின் அதன் அகலம் $3\frac{3}{4}$ அடி என நிறுவுக.

12. சதுர அடிப்பக்கமும் மேல் பக்கமும் உள்ள ஒரு செவ்வகப் பெட்டியை அதன் பக்கங்களுக்கு நடுவில் செல்லும்படி l அங்குல நீளமுள்ள (முடிச்சுக்கள் நீங்கலாக உள்ள நீளம்) நூலால் கட்டப்படுகிறது. பெட்டியின் மிக அதிகக் கொள்ளளவு l^3 க. அங். என நிறுவுக.

4. தொகை காணல்

(Integration)

4.1 வரையறுக்கப்படாத தொகை (Indefenite integral):

x இன் சார்பலன் $f(x)$ தரப்பட்டால், அதன் வகைக்கெழு $f'(x)$ இன் பொருளைப் பற்றியும், அதன் பயன்பாடுகளையும் இது வரை கூறினோம். $f'(x)$ என்பது $f(x)$ இன் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு என்றால், $f(x)$ என்பது $f'(x)$ இன் முதற்சார்பலன் (Primitive) எனப்படும். $f'(x)$ தரப்பட்டால் அதன் முதற் சார்பலன் காண்பது வறையறுக்கப்படாத அதன் தொகை காணல் எனப்படும். இந்தத் தொகையைக் குறியீட்டில் $\int f'(x)\, dx$ எனக் குறிப்பது வழக்கம் [தொகை எனும் சொல்லின் ஆங்கிலச் சொல் Sum. இதன் முதன் எழுத்து S. இது மறுவி $\int$ என எழுதப்படுகிறது. வகைக்கெழுவுடன் 'dx' உம் ஏன் சேர்க்கப்பட வேண்டும்? ஏன் என்பது பின்னர் விளக்கப்படும்.]

$\int f(x)\, dx = F(x)$ என்றால் $F(x)$ இன் வகைக்கெழு $f(x)$ எனப் பொருளாகும்.

$\int f(x)\, dx$ காண்க என்றால், எந்தச் சார்பலனின் வகைக்கெழு $f(x)$ ஆகிறதோ அந்தச் சார்பலனைக் காண்க என்பது பொருளாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\int \cos x\, dx = \sin x$

ஏனெனில் $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ ஆவதால்.

$\int f(x)\, dx$ என்பதை $f(x)$இன் தொகை எனச் சுருக்கமாகக் கூறுவோம். வகைக்கெழுப் பட்டியலில் இருந்து தொகைப் பட்டியலைத் தயாரிக்க வேண்டும்.

தொகைப் பட்டியல் :

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n \neq 1)$ [$\int \frac{1}{x}\, dx$ கூறப்படவில்லை.]

2. $\int \frac{1}{x^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\ x^{n-1}} \quad (n \neq 1)$

3. $\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m}$

4. $\int \sin mx\, dx = \frac{-\cos mx}{m}$

5. $\int \sec^2 mx\, dx = \frac{\tan mx}{m}$

6. $\int \mathrm{cosec}^2\, mx\, dx = \frac{-\cot mx}{m}$

[இந்தச் சிறு நூலுக்கு இவை மட்டும் போதும். வலப் பக்கச் சார்பலன்களின் வகைக்கெழுக்களைக் கண்டு, பட்டியல் சரியா எனப் பார்க்கலாம்.]

4.2 தொகை காணும் சில விதிகள் :

1. தொகையுடன் சேர்க்கப்படும் மாறிலி (Constant of integration) :

$$\int (f)\, x\, dx = F(x) \text{ என்றால்}$$

அதன் பொருள் $\frac{d}{d\,x}\{F\ (x)\} = f\,(x)$ என்பதாம்.

$F(x)$உடன் C எனும் ஏதேனும் மாறிலியைச் சேர்க்க $F(x)+c$ வருகிறது.

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)\text{என்றால்,}\ \frac{d}{dx}[F(x)+c]=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}c$$

$=f(x)$. $\therefore \int f(x)\,dx$ இன் தொகையை மிகப் பொதுவாகக் கூறவேண்டுமெனின் அது $F(x)+c$ ஆகும். இங்கு c என்பது தொகையுடன் சேரும் மாறிலி (constant of integration) எனப்படும். தொகைச் சார்பலன் எழுதியதும் அதனுடன் மாறிலி c ஐச் சேர்க்கவேண்டும். இந்த மாறிலியின் வரைபட விளக்கமும் பயன்பாடும் பின்னர்க் கூறப்படும்.

2. $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ என்பதை அறிவோம். இதனால்

$$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

ஆகும்.

3. $\frac{d}{dx}kf(x)=k\frac{d}{dx}f(x)$ [k மாறிலி]

அதனால் $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ ஆகும்.

4. $\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$ என்றால்

$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$ என அறிவோம்.

$\therefore$ $\int f(x)\,dx=F(x)$ என்றால்

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{F(ax+b)}{a}\text{ ஆகும்.}$$

(எ-டு.) (i) $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\therefore \int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a.(n+1)}$

(ii) $\int\cos x\,dx=\sin x$ $\therefore \int\cos(ax+b)\,dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}$

கணக்கு 1 : $\int \frac{x^4-2x^2-3}{x^2}\, dx$ ஐக் காணவும்.

$$\int \frac{x^4-2x^2-3}{x^2}\, dx = \int \left(x^2-2-\frac{3}{x^2} \right) dx$$

$$= \int x^2\, dx - \int 2\, dx - \int \frac{3}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{3}{x} + c.$$

[**குறிப்பு :** (i) $\int a\, dx = ax$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(ii) தொகைச் சார்பலனைக் கண்டு c எனும் மாறிலியைச் சேர்க்கவும்.

(iii) இங்கு $\int x^n\, dx$; $\int \frac{dx}{x^n}$ எனும் வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம். $\int \frac{dx}{x}$ இன் மதிப்பு இந்நூலுக்கு அப்பாற்பட்டதாதலால் கூறப்படவில்லை.]

கணக்கு 2 : $\int 2 \sin 4x \cos 2x\, dx$ காண்க.

$$\int 2 \sin 4x \cos 2x\, dx = \int (\sin 6x + \sin 2x)\, dx$$

$$= \int \sin 6x\, dx + \int \sin 2x\, dx$$

$$= -\frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 2x}{2} + c$$

[**குறிப்பு :** $\int f(x)\, g(x)\, dx$ இன் வாய்பாடு இந்நூலில் இல்லை. பெருக்கற்பலனை, இங்குக் கூட்டற்பலனாகக் கோண கணிதத்தில் கண்ட விதிப்படி மாற்றித் தொகை காண்கிறோம்.]

கணக்கு 3 : $4 \sin 4x \cos 2x \cos x$ இன் முதற் சார்பலன் (Primitive) என்ன ?

$$4 \sin 4x \cos 2x \cos x$$

$$= 2 \sin 4x \;\; 2 \cos 2x \cos x$$

$$= 2 \sin 4x \quad [\cos 3x + \cos x]$$
$$= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x$$
$$= \sin 7x + \sin x + \sin 5x + \sin 3x$$
$$= \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

∴ முதற் சார்பலன்

$$= \int \sin x \, dx + \int \sin 3x \, dx + \int \sin 5x \, dx + \int \sin 7x \, dx$$
$$= C - \cos x - \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7}$$

கணக்கு 4: $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; $\sin^3 x$; $\cos^3 x$— இவற்றின் தொகை காணவும்.

(i) $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \quad \therefore \int 2 \sin^2 x \, dx = \int 1 \, dx - \int \cos 2x \, dx$

$$\therefore \int 2 \sin^2 x \, dx = x - \frac{\sin 2x}{2}$$
$$\therefore \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

(ii) $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \qquad \therefore \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$

(iii) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ என்பது சூத்திரம்.

$$\therefore \sin^3 x = \frac{3 \sin x}{4} - \frac{\sin 3x}{4}$$
$$\therefore \int \sin^3 x \, dx = -\frac{3 \cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + c$$

(iv) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

$$\therefore \cos^3 x = \frac{\cos 3x}{4} + \tfrac{3}{4} \cos x$$
$$\therefore \int \cos^3 x \, dx = \frac{\sin 3x}{12} + \frac{3 \sin x}{4} + c$$

பயிற்சி 13

கீழ்வருவனவற்றின் தொகைகளைக் கணக்கிடுக:

1. (i) x^6 (ii) $\frac{1}{x^6}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\sqrt[3]{x}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. $12x^3 - 6x^2 + 8x - 2$ 3. (i) $(1-3x)^2$ (ii) $(2+5x)^8$

4. (i) $\frac{1}{(2x+3)^2}$ (ii) $\frac{1}{(3-2x)^3}$ 5. (i) $\sin 4x$ (ii) $\cos 5x$

(iii) $\sec^2 2x$ 6. $2 \sin 5x \cos 7x$ 7. $\sin 6x \cos 2x$ 8. $\cos 4x \cos x$

9. $\cos 4x \cos 3x \cos x$ 10. $4 \sin 6x \sin 4x \sin 2x$

11. (i) $\cos^3 2x$ (ii) $\sin^3 2x$ 12. (i) $\cos^2 4x$ (ii) $\sin^2 3x$

4.3 பிரதியிட்டுத் தொகை காணல்:

எத்தகைய சிக்கலான சார்பலனுக இருந்தாலும் அதன் வகைக்கெழுவைக் காண முடியும். ஆனல் சார்பலனின் தொகை காண்பது அவ்வளவு எளிதல்ல. அதற்குப் பல முறைகள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று பிரதியிட்டுத் தொகை காணல் (Integration by substitution).

கணக்கு 1: $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ ஐக் காண்க.

[இங்கு $\sin^3 x$ என்பது $\sin x$ இன் சார்பலன்; அதன் வகைக்கெழு $\cos x$, தனியாக dx இன் குணகமாக உள்ளது.]

$t = \sin x$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \cos x; \quad \therefore dt = \cos x \, dx$$

$$\therefore \int \sin^3 x \cos x \, dx = \int t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} + c$$

$$\therefore \int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

கணக்கு 2: $\int (2x^2+5x-6)^8 \, (4x+5) \, dx$ கணக்கிடுக.

இங்கு $2x^2+5x-6$ இன் வகைக்கெழு $4x+5$.

$\therefore \quad t = 2x^2 + 5x - 6$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\frac{dt}{dx}=4x+5 \quad \therefore \quad (4x+5)\,dx=dt$$

$$\therefore \quad \int (2x^2+5-6)^8\,(4x+5)dx = \int t^8\,dt = \frac{t^9}{9}+c$$

$$= \frac{(2x^2+5x-6)^9}{9}+c$$

குறிப்பு : $\int f[\varnothing(x)]\,\varnothing'(x)\,dx$ என்பது பொது உருவம்.

இங்கு $t=\varnothing(x)$ எனப் பிரதியிட்டால்

$$\frac{dt}{dx}=\varnothing'(x) \quad \therefore \quad \varnothing'(x)\,dx=dt$$

$$\therefore \quad \int f[\varnothing(x)]\,\varnothing'(x)\,dx=\int f(t)\,dt.$$

இதன் தொகை $F(t)+c$ என்றால் காணவேண்டிய தொகை $F[\varnothing(x)]+c$ ஆகும்.

பயிற்சி 14

கீழ்வருவனவற்றின் தொகைகளைக் கணக்கிடுக.

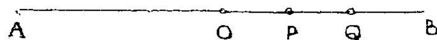
1. $(2x^2-5x+1)\;4x-5)$
2. $\sin^2 x\cos x$
3. $\cos^4 x\sin x$
4. $\sec^2 x\tan x$
5. $\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$
6. $\dfrac{x}{x^2-9}$
7. $(x^3-a^2)^2\,x^2$
8. $\dfrac{x^3}{(x^4-1)^2}$
9. $\dfrac{x^3}{x^4+1}$
10. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

4.4 தொகை காணலின் பயன்பாடுகள் :

$y=f(x)$ என்றால், $\dfrac{dy}{dx}$ என்பது (i) x ஐப் பற்றிய y இன் மாறுவீதம் என்றும் (ii) $y=f(x)$ எனும் சமன்பாடு தரும் வளை வரையின் சரிவைத் தரும் சார்பலன் என்றும் முன்னர் கூறியுள்ளோம்.

(i) ஒரு சார்பலனின், தனிமாறியைப் பற்றிய மாறுவீதம் தரப்பட்டால் முதற் சார்பலனைக் காண முடியும். (ii) வளை வரையின் சரிவு தரப்பட்டால் அதன் சமன்பாட்டையும் காண முடியும். இவைகளைப் பற்றி இங்கே கூறுவோம்.

(i) **துகளின் நேர்கோட்டியக்கம் :**



படம் 11

AB என்ற நேர்கோட்டில் ஒரு துகள் (Particle) இயங்குகிறது. t நேரத்தில் அதன் நிலை P ஆகுக. AB இல் O எனும் மூலப்புள்ளியைக் கொள்வோம். OP எனும் தூரம் s ஆகுக.

[OB எனும் திசையில் அளவுகள் நேரெண்ணாலும் எதிர்த் திசையில் எதிரெண்ணாலும் குறிக்கப்படட்டும். s என்பது இங்கு P இன் கூறு (coordinate) ஆகிறது.]

$t+\Delta t$ நேரத்தில் துகள் Q இல் இருக்கட்டும்.

$OQ = s+\Delta s$ ஆகுக.

$\therefore$ Δt நேரத்தில் இடப்பெயர்ச்சி $= \Delta s$

$\therefore$ திசைவேகம் (t நேரத்தில்) $v = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$(t+\Delta t)$ நேரத்தில் வேகம் $v+\Delta v$ ஆகுக.

$\therefore$ Δt நேரத்தில் வேக மாறுதல் Δv

$\therefore$ t நேரத்தில் முடுக்கம் $a = \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$

$\therefore$ t நேரத்தில் முடுக்கம் $a = \dfrac{dv}{dt}$

அல்லது $a = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

அல்லது $a = \dfrac{dv}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dt}$

$$= \frac{dv}{ds} v$$

$$\therefore \quad a = v \frac{dv}{ds}$$

என்று இவ்வாறு நேர் கோட்டியக்கத்தில் t நேரத்தில் துகளின் நிலை s என்றால்,

கீழ்வரும் மாறுவீதங்கள் வருகின்றன:

(i) திசை வேகம் $v = \frac{ds}{dt}$

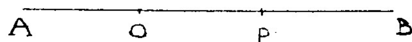
(ii) முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt}$ (vஉம் tஉம் இணைப்பது)

அல்லது $a = v \frac{dv}{ds}$ (vஉம் sஉம் இணைப்பது)

அல்லது $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ (sஉம் tஉம் இணைப்பது)

இந்த மாறுவீதங்களின் உதவியால் துகளின் நேர்கோட்டியக்கம் ஆராயப்படும். இதற்கு $t=0$ எனும்போது துகளின் நிலை என்ன? வேகம் என்ன? என்பவை தரப்படல்வேண்டும். இவை புறப்படு நியதிகள் (Initial conditions) எனப்படும்.

துகளின் முடுக்கம் சீராக இருந்தால் அதன் நிலை, வேகம் காண (Motion under constant accelerations):



படம் 12

துகள் ABஇல் இயங்கட்டும்.

t நேரத்தில் துகளின் நிலை P ஆகுக.

ABஇல் O எனும் புள்ளி மூலப்புள்ளி. $OP=s$ ஆகுக.

OB திசையில் தூரங்களை நேரெண்ணால் குறிப்போம்.

t நேரத்தில் துகளின் வேகம் v;

அதன் முடுக்கம் a ஆகுக.

$t=0$ என்றால் $v=u$ ஆகுக. அப்போது $s=0$ ஆகுக.

முடுக்கம் $\frac{dv}{dt} = a$ (மாறிலி)

$$\therefore \int dv = \int a \, dt$$

$$\therefore \quad v = at + c$$

$t = 0$ எனும்போது $v = u$ ஆவதால்

$$u = 0 + c \qquad \therefore \quad c = u$$

$$\therefore \quad v = u + at$$

இவ்வாறு 't' நேரத்தில் (தரப்பட்டுள்ள புறப்படு நியதிகளுக்குட்பட்டு) $v = u + at$ எனக் காண்கிறோம்.

(ii)
$$v = \frac{ds}{dt} = u + at$$

$$\therefore \int ds = \int (u + at)\, dt$$

$$\therefore \quad s = ut + \tfrac{1}{2}at^2 + A$$

$t = 0$ எனும்போது $s = 0$ ஆவதால் $A = 0$

$$\therefore \quad s = ut + \tfrac{1}{2}at^2$$

(iii) முடுக்கத்திற்கு மற்றொரு குறியீடு $v \dfrac{dv}{ds}$

$$v \frac{dv}{ds} = a$$

$$\therefore \int v\, dv = \int a\, ds$$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} = as + B$$

$$\therefore \quad v^2 = 2as + B$$

ஆனல் $s = 0$ ஆகும்போது $v = u$

$$\therefore \quad u^2 = 2a.\,0 + B \qquad \therefore \quad B = u^2$$

$$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2as$$

என்று சீரான முடுக்கத்தில் இயங்கும் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம்.

[குறிப்பு : தொகையுடன் சேர்க்கப்படும் மாறிலி எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதை இங்குக் காண்கிறோம்.]

4·5 (ii) வளைவரையின் சரிவு தரப்பட்டால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண.

கணக்கு : ஒரு வளைவரையின் சரிவு ஒரு புள்ளியில் அதன் x கூறுடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கிறது என்றால் வளை

வரையின் சமன்பாடென்ன? x கூறைப்போல் இருமடங்கு சரிவுடன் $(1, 1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வளை வரையின் சமன்பாடென்ன?

(i) $y = f(x)$ என்பது சமன்பாடாகுக.

வளைவரையின் சரிவு $= \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = kx \text{ தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\therefore \int dy = \int kx\, dx$$

தொகைகாண $\therefore$ $y = \frac{kx^2}{2} + c$

$$y = \frac{kx^2}{2} + c$$

(ii) $k = 2$ என்றால் $y = x^2 + c$

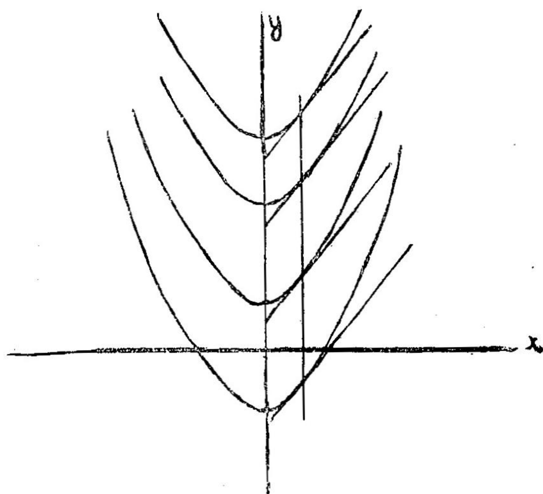
இந்த வரை $(1, 1)$ வழி போவதென்றால்

$$1 = 1 + c \qquad \therefore \quad c = 0$$

$\therefore$ வளைவரையின் சமன்பாடு

$$y = x^2$$

குறிப்பு : (x, y) என்ற புள்ளியில் சரிவு $2x$ என உள்ள



படம் 13

வரையின் சமன்பாடு $y = x^2 + c$ எனக் கண்டோம். c க்கு வெவ்

வேறு மதிப்புக் கொடுக்க வெவ்வேறு வரைகள் வரும். ஆனால் இவ்வரைகள் யாவும் ஒரு குடும்பத்தைச் சேர்ந்தவை (family of curves). x உறுப்பு ஒன்றாக இருக்கும் இந்த வரைகளில் உள்ள புள்ளிகளில் அமையும் தொடுகோடுகள் இணையாக அமையும். படத்தில் சில வரைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன.

(குறிப்பு: இங்குத் தொகையுடன் சேர்க்கப்படும் மாறிலியின் வரைபட விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது.)

கணக்கு : ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள தொடுகோட்டின் சரிவு, புள்ளியின் x உறுப்பின் வர்க்கத்துடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் இருந்தால் அத்தகை வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

$y=f(x)$ என்பது சமன்பாடாகுக.

$\therefore$ (x, y) என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சரிவு $\frac{dy}{dx}=\frac{k}{x^2}$ (கொள்கை)

$$\therefore \int dy=\int \frac{k}{x^2}\, dx$$

$$\therefore y=-\frac{k}{x}+c$$

$$\therefore \quad xy=-k+cx$$

$\therefore$ பொதுச் சமன்பாடு $= xy-cx+k=0$

பயிற்சி 15

A

1. சீரான முடுக்கத்துடன் நேர் கோட்டில் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. முடுக்கம், இயக்கத் துவக்கத்தில் மூலப் புள்ளியை நோக்கி 'a' அலகு/விநாடி^{2} ஆகவும், அப்போதுள்ள வேகம் u எனவும் ஆனால், 't' நேரத்தில் துகளின் நிலை என்ன ? மூலப்புள்ளியிலிருந்து போகும் மிக அதிக தூரம் என்ன ? அப்போது நேரம் என்ன ? மீண்டும்

மூலப்புள்ளிக்கு வர ஆகும் காலம் என்ன ? அப்போது அதன் வேகம் என்ன ? இவற்றை நுண்கணிதம் பயன்படுத்திக் காணவும்.

2. ஒரு துகளின் முடுக்கம் புறப்பட்டு 't' விஞடி சென்றதும் $18-2t$ அடி/விஞடி^{2} என்ருல், 3 விஞடி முடிவில் அதன் வேகம் என்ன ? துவக்க வேகம் 20 அடி/விஞடி என்ருல் அப்போது அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது?

3. ஒரு துகள் u அடி/விஞடி வேகத்தில் புறப்படுகிறது. அதன் முடுக்கம் t விஞடியில் $2\cos\frac{\pi}{6}t$ அடி/விஞடி^{2}. 3 ஆவது விஞடி முடிவில் அது சென்றுள்ள தூரமும் அதன் வேகமும் என்ன ?

4. 't' விஞடியில் s தூரத்தில் உள்ள துகளின் முடுக்கம் $7-2s$ அடி/விஞடி^{2}. புறப்படும் வேகம் 40 அடி/விஞடி என்ருல் துகள் மூலப்புள்ளியிலிருந்து போகும் மிக அதிக தூரம் என்ன ?

B

ஒரு வளைவரையின் சரிவு தரப்பட்டுள்ளது. வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காணவும். (அதன்மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியும் தரப்பட்டுள்ளது.)

5. $y=f(x)$ என்ருல், சரிவு$=\frac{3}{x^2}$; புள்ளி $(1, 2)$.

6. $y=f(x)$ என்ருல், சரிவு$=2-3x$; புள்ளி $(1, 0)$.

7. $y=f(x)$ என்ருல் சரிவு $=\frac{1}{\sqrt{x}}$; புள்ளி $(1, 1)$

8. $y=f(x)$ என்ருல் $x^3\frac{d^2y}{dx^2}=2$; வரையின் மேலுள்ள இரு புள்ளிகள் $(1, 1)$, $(-1, 2)$.

9. $y=f(x)$ என்ருல் $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$; $(1, 0)$, $(2, 1)$ என்பவை வரையில் உள்ள இரண்டு புள்ளிகள்.

10. ஒரு வரையின் ஒரு புள்ளியிலுள்ள தொடுகோட்டின் சரிவு, அப்புள்ளியை மூலப்புள்ளியுடன் சேர்க்கும் கோட்டின் சரிவுடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் உள்ளது. அத்தகை வரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு என்ன ?

5. வரையறுக்கப்பட்ட தொகை

(Definite integral)

5.1 விளக்கம்:

$\int f(x)\, dx = F(x)$ என்ருல்,

$\int_a^b f(x)\, dx$ எனும் குறியீடு $F(b) - F(a)$ எனும் மதிப்பைக் குறிக்கும்.

$\int_a^b f(x)\, dx$ என்பது வரையறுக்கப்பட்ட தொகை எனப் படும். a என்பது இதன் கீழ்நிலை (Lower limit) என்றும், b என்பது மேல் நிலை (Upper limit) எனவும் கூறப்படும்.

குறிப்ப 1 : $\int f(x)\, dx = F(x)$ என்ருல் தொகையுடன் மாறிலியைச் சேர்த்துக் கூறவேண்டும்.

அப்போது $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

$$\therefore \int_a^b f(x)\, dx = [F(b) + c] - [F(a) + c]$$

$$= F(b) - F(a)$$

$\therefore \int_a^b f(x)\, dx$ என்பதன் மதிப்பு a, b ஆகியவற்றைப் பொறுத்த திட்டமான மதிப்பு ஆகும் எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 ; $\int f(x)\, dx = F(x)$ என்றால்

$x = t$ எனப் பிரதியிட

$\int f(t)\, dt = F(t)$ ஆகும்.

ஆனால் $\int_a^b f(x)\, dx = f(b) - f(a) \quad \int_a^b f(t)\, dt = f(b) - f(a)$

$$\therefore \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt \left[= \int_a^b f(y)\, dy \ldots\ldots \right]$$

$\therefore$ மதிப்பு a, b சார்பலன் இவற்றைப் பொறுத்ததே அன்றி, தனிமாறி x ஆகவோ, t ஆகவோ, வேறு எது வேண்டுமாயினும் இருக்கலாம்.

குறிப்பு 3 : $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$

எனக் கூறலாம். ஏனெனில்

$\int f(x)\, dx = F(x)$ ஆகுக

$$\therefore \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x) = F(c) - F(a) + F(d) - F(c) + F(b) - F(d)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

குறிப்பு 4 : (i) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

(ii) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

கணக்கு 1 : (i) $\int_1^2 x^2\, dx$; (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}\, dx$;

(iii) $\int_0^{\pi/4} 2 \sin 3x \cos x\, dx$—இவற்றின் மதிப்புக் காண்க.

(i) $\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (\frac{1}{3}) - (0) = \frac{1}{3}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{0 - (-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(iii) $\int_0^{\pi/4} 2 \sin 3x \cos x \, dx$

$$2 \sin 3x \cos x = \sin 4x + \sin 2x$$

$$\therefore \int 2 \sin 3x \cos x \, dx = \int \sin 4x \, dx + \int \sin 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{-\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} \right]$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} 2 \sin 3x \cos x \, dx = -\tfrac{1}{4} \Big[\cos 4x + 2 \cos 2x \Big]_0^{\pi/4}$$

$$= -\tfrac{1}{4} \left[\left(\cos \pi + 2 \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\cos 0 + 2 \cos 0 \right) \right]$$

$$= -\tfrac{1}{4} \Big[-1 - 3 \Big] = 1.$$

குறிப்பு : முதலில் வரையறுக்கப்படாத தொகை காண வேண்டும். மாறிலியைச் சேர்க்க வேண்டிய தேவையில்லை. பிறகு மேல் நிலை மதிப்பு—கீழ் நிலை மதிப்பு வரையறுக்கப்பட்ட தொகையைத் தரும்.]

பயிற்சி 16

கீழ்வரும் தொகை காணவும்.

1. $\int_0^2 3x^2 \, dx$ 2. $\int_0^2 4x^3 \, dx$ 3. $\int_1^3 (1-2x) \, dx$

4. $\int_0^2 (y^2 - 5y + 3) \, dy$ 5. $\int_{-1}^1 (t^2 - 2t + 3) \, dt$

6. $\int_{-1}^1 (2x + x^3) \, dx$ 7. $\int_0^2 (t^2 + 1)^{10} \, t \, dt$

8. $\int_{4}^{9} \frac{u+1}{\sqrt{u}}\, du$

9. $\int_{0}^{a} \frac{x^3}{a^3+x^4}\, dx$

10. $\int_{-1}^{1} x\sqrt{3-x^2}\, dx$

11. $\int_{0}^{a} \frac{7u^2}{\sqrt[3]{7u^3+a^2}}\, du$

12. $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx$

13. $\int_{0}^{\pi} 2\sin x\cos x\, dx$

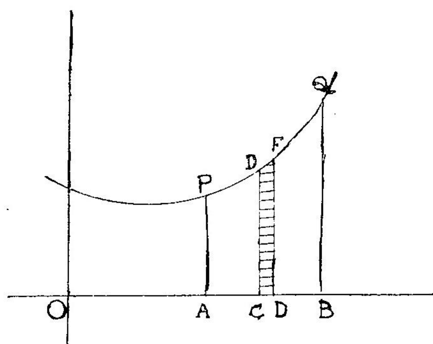
14. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos x\, dx$

15 $\int_{0}^{\pi} (a\cos x+b\sin x)\, dx.$

தொகை காணலின் பயன்பாடுகள்

5.2 பரப்பு காணல் :

$x=a$, x அச்சு, $x=b$, $y=f(x)$ எனும் வரை என நான்கு பக்கங்களையுடைய பரப்புக் காணும் முறையைக் கூறுவோம்.



படம் 14

$x=a$ எனும் கோடு x அச்சை A இலும் வரையை P இலும் வெட்டட்டும். அப்போது Pஇன் கூறுகள் $[a, f(a)]$ ஆகும். இதேபோல $x=b$ எனும் கோடு x அச்சை Bஇலும் வரையை Q இலும் வெட்ட $Q[b, f(b)]$ ஆகிறது.

$ABQP$ உள்ளடக்கிய பரப்பு S ஆகுக.

$OC=x$ ஆகுக ; CD வரைக்குக் குத்தாயம் ஆகுக.

$\therefore \quad CD=f\ (x)$.

Cஐ அடுத்த புள்ளி E ஆகுக. EF என்பது வரைக்குக் குத்தாயம்.

$\therefore \quad E=x+\Delta x$; $EF=y+\Delta y$ ஆகும்.

பரப்பு $CEFD$, மொத்தப் பரப்பு Sஇல் நுண்ணிய பகுதி. ஆகவே Δs எனக் குறிப்போம். இது போன்று Aஇலிருந்து B வரை நுண்ணிய செவ்வகங்கள் ஏற்படுத்தி இவற்றின் தொகையைக் காண வேண்டும்.

படத்திலிருந்து $y\ \Delta x < \Delta s < (y+\Delta y)\ \Delta x$ எனக் காண்கிறோம்.

மொத்தப் பரப்பு $=\sum (\Delta s)$

$\sum (\Delta s) = \sum (y\ \Delta x)$க்கும் $\sum (y+\Delta y)\ \Delta x$ க்கும் இடையேயுள்ளது. $\Delta x \to 0$ ஆகும்போது நுண் செவ்வகங்களின் எண்ணிக்கை $\to \infty$ ஆகும்.

அப்போதுள்ள எல்லை $\int_a^b y\ dx$ ஆகும்.

[இதை இங்கு ஒப்புக் கொள்கிறோம். நிரூபணம் தரப்படவில்லை].

$$\therefore \quad S=\int_a^b y\ dx \text{ அல்லது } \int_a^b f(x)\ dx \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு 1 : இவ்வாறு கூறுவதிலிருந்து $\int f(x)\ dx$ என்பதை ஏன் தொகை என்று கூறுகிறோம் என்பதையும், dx ஏன் சேர்க்க வேண்டுமென்பதையும் ஓரளவுக்கு உணரலாம்.

குறிப்பு 2 : $y=a$, y அச்சு, $x=f(y)$, $y=b$ எனும் பக்கங்களையுடைய பரப்பு $S=\int_a^b x\ dy$ ஆகும். $x=g(y)$ என்றால்

பரப்பு $S=\int_a^b g(y)\ dy$ ஆகும்.

கணக்கு (i) : $y=x^2$ என்ற வரை, $x=2$, $x=3$, x அச்சு—இவையிடையேயுள்ள பரப்பு என்ன?

(ii) $y=x^2$, $y=2$, $y=3$, y அச்சு—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு என்ன?

$$\text{(i) பரப்பு } A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3$$

$$\therefore \quad A = \left(\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{19}{3} \text{ ச. அலகுகள்.}$$

$$\text{(ii) பரப்பு } A = \int_a^b x\,dy = \int_2^3 \sqrt{y}\,dy = \int_2^3 y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$A = \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 = \left[\frac{2}{3} y \sqrt{y}\right]_2^3$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பு} = \frac{2}{3}\left[3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right] \text{ ச. அலகுகள்.}$$

கணக்கு 2 : $y = x^2-3x+2$ என்ற வரை, x அச்சு, $x=4$—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு என்ன?

[இங்கு வரை, x அச்சை வெட்டுமிடமிருந்து பரப்பைக் கொள்ளவேண்டும்].

வரை, x அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் y கூறு $= 0$.

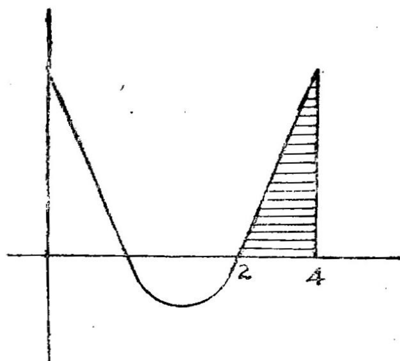
$\therefore \quad 0 = x^2-3x+2$

$\therefore \quad (x-2)(x-1)=0 \qquad \therefore \quad x = 1, 2$

$\therefore$ வரை $(1, 0)$, $(2, 0)$ எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இங்கு $(2, 0)$ இலிருந்து பரப்பைக் கணக்கிட வேண்டும்.

$$A = \int_2^4 (x^2-3x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^4$$



படம் 15

$$= \left(\frac{64}{3} - 24 + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right)$$

$= 4\frac{2}{3}$ ச. அலகுகள்.

கணக்கு 3 : $y = 4 - 3x - x^2$ என்ற வரைக்கும், x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பைக் காணவும்.

[இங்கு வரை, x அச்சை வெட்டும் இரண்டு புள்ளிகளின் x கூறுகள் வரையறுத்த தொகையின் கீழ், மேல் நிலைகளைத் தரும்.]

x அச்சை, வரை வெட்டும் புள்ளிகளின் y கூறு $= 0$

$\therefore \quad 4 - 3x - x^2 = 0$

$(4 + x)(1 - x) = 0$

$\therefore \quad x = -4, 1$ (இவைதான் கீழ் மேல் நிலைகள்.)

$$\therefore \quad \text{பரப்பு } A = \int_{-4}^{1} (4 - 3x - x^2)\, dx$$

$$= \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{1}$$

$$= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{6}\right) - \left(\frac{-112}{6}\right) = \frac{125}{6} \text{ ச. அலகுகள்.}$$

$\therefore$ பரப்பு $= 20\frac{5}{6}$ ச. அலகுகள்.

கணக்கு 4 : $y = \sin x + \cos x$ எனும் வரையும், வரை xஅச்சை அடுத்தடுத்து வெட்டும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் உள்ளடக்கும் பரப்பைக் காண்க.

$\sin x + \cos x = 0 \qquad \therefore \tan x = -1$

$$\therefore \quad x = -\frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{பரப்பு } A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$= \Big[-\cos x + \sin x\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \left[-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\frac{3\pi}{4}\right] - \left[-\cos\frac{-\pi}{4} + \sin\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ ச. அலகுகள்.}$$

கணக்கு 5 : $y = x^2$, $y^2 = x$ எனும் வரைகளிடையேயுள்ள பரப்பைக் கணக்கிடு.

[**குறிப்பு :** $y = f(x), y = \varnothing(x)$ எனும் வரைகளிடையேயுள்ள பரப்பைக் காண : (i) $f(x) = \varnothing(x)$ எனும் சமன்பாட்டை விடுவிக்கவும். அவை வெட்டும் அடுத்தடுத்த இரண்டு புள்ளி

களின் x கூறுகளைக் காண்க. அவை a, b ஆனால் இடையே யுள்ள பரப்பு $\int_a^b [f(x) - \varnothing(x)]\, dx$ ஆகும். இது எவ்வாறு என்பது எளிதில் காண முடியும்].

$y = x^2$, $y^2 = x$ விடுவிக்க

$$x^4 = x \qquad \therefore \quad x = 0,\ 1$$

$$\therefore \quad \text{இடையேயுள்ள பரப்பு} = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) - (0)$$

$$= -\tfrac{1}{3}.$$

$\therefore$ பரப்பு $= \frac{1}{3}$ ச. அலகு.

கணக்கு 6 : $y = x^2$; $3x - y = 2$ எனும் வரைகளிடையே யுள்ள பரப்பைக் காண்க.

முதல் வரை $y = x^2$

இரண்டாவது வரை $y = 3x - 2$

விடுவிக்க : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$(x-1)\ (x-2) = 0$$

$$x = 1,\ 2.$$

$$\therefore \quad \text{பரப்பு} = \int_1^2 [x^2 - (3x - 2)]\, dx$$

$$= \int_1^2 (x^2-3x+2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

பரப்பு $= \frac{1}{6}$ ச. அலகுகள்.

[குறிப்பு : கடைசி இரண்டு கணக்குகளிலும் பரப்பு எதிரெண்ணுக வருகிறது ; அதாவது முதல் வரை இரண்டாவது வரைக் கீழாக (x அச்சை அடுத்து) இருந்தால் எதிரெண்ணுக வரும்.]

பயிற்சி 17

கீழ்க் காணும் பரப்புக்களைக் காண்க :

1. $y=x^2$, $x=1$, $x=2$, x அச்சு—இவற்றிடையே உள்ள பரப்பு.

2. $y=x^2-x+1$, எனும் வரை, x அச்சு, y அச்சு, $x=\frac{1}{2}$ எனும் கோடு—இவற்றிடையுள்ள பரப்பு.

3. $y = 2x^2-3x+3$ எனும் வரை, x அச்சு, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ எனும் வரைகளிடையேயுள்ள பரப்பு.

4. $y^2=4x$, x அச்சு, $x=1$—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

5. $y = 9x - x^2 - 14$, x அச்சு, — இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

6. $y^2=x$, $y=x^2$—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

7. $y^3=x$, $y=x^3$—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

8. $y^2=4x$, $x=y$ எனும் கோடு—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

9. $y = \sin 2x$ எனும் வரையின் ஒரு வில்லுக்கும் x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பு.

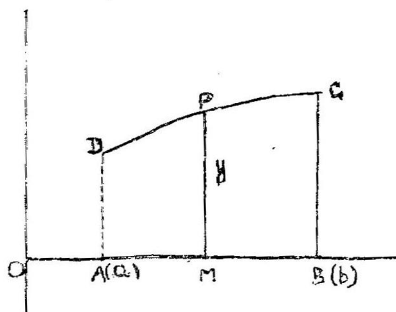
10. $y = \sin x$ எனும் வரையின் ஒரு வில், $y = \frac{1}{2}$ —இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

11. y அச்சு, $y = \cos x$, $y = \sin x$ —இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

12. $y = \sqrt{3} \cos - \sin x$ எனும் வரையின் ஒரு வில், x அச்சு, y அச்சு, இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு.

5·3 உருளைத் திண்மத்தின் பருமன் (Volume of solid of revolution) :

$y = f(x)$ எனும் சமன்பாடு தரும் வரைப்படம் (1)இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. $x = a$, $x = b$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) \geq 0$ ஆகுக. DC என்பது இந்த இடைவெளியில் உள்ள

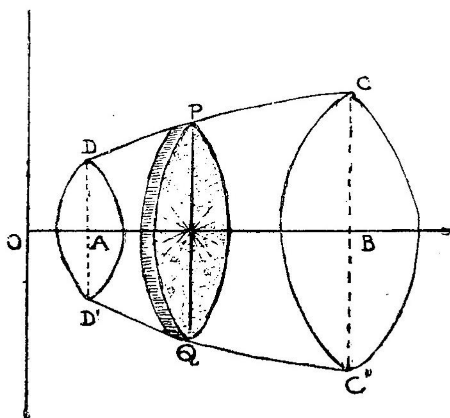


படம் 16

வரை. $x = a$, x அச்சு, $x = b$, வரை—இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு x அச்சைச் சுற்றிச் சுழலட்டும். இவ்வாறு சுழல்வதால் ஏற்படும் திண்மம் (படம்17) $DD'C'C$ என்பது உருளைத் திண்மம் எனப்படும். இதன் பருமனைக் [அதாவது கொள்ளளவை] காணும் முறையைக் காண்போம்.

மூலப்புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில், x அச்சுக்குக் குத்தாக இந்தத் திண்மத்தின் வெட்டு முகத்தைப் பார்ப்போம். திண்மம், வரை சுழல்வதால் ஏற்படுவதால் வெட்டுமுகம் வட்டம் ஆகும். OM ஐ x கூறாக உடைய வரையில் உள்ள

புள்ளி P ஆனல் வெட்டுமுகத்தின் ஆரம் $MP = y$ ஆகும். வெட்டு முகத்தின் பரப்பு $= \pi y^2$. வெட்டு முகத்தை அடிப்



படம் 17

பக்கமாகவும் Δx கனமுமுள்ள வட்ட உருளை திண்மத்தின் நுண்ணிய பாகமாகும். திண்மத்தின் இங்குள்ள நுண்ணிய பருமன் $\delta v = \pi y^2 \Delta x$. இதுபோன்று $x = a$ இலிருந்து $x = b$ வரை பல நுண்ணிய வட்ட உருளைகளின் பருமன்களின் தொகை, உருளைத் திண்மத்தின் மொத்தப் பருமனுக்கு $\Delta x \to 0$ ஆகும் போது சமனுகும்.

$$\therefore \quad \text{மொத்தப் பருமன் } V = \int \delta v = \sum_{\Delta x \to 0} \pi y^2 \Delta x$$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx$$

[நுண் பாகங்களின் எண்ணிக்கை $\to \infty$ ஆகும்]

$\therefore$ x அச்சைச் சுற்றி, வரை சுழன்ருல்

$$\text{பருமன் } V = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

இதேபோல y அச்சைச் சுற்றி வரை சுழன்ருல்

$$\text{பருமன்} \quad V = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$

[$a \leq y \leq b$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள வரை]

[**குறிப்பு :** பரப்பு, திண்மம் இவை காணுவதிலிருந்து $\int f(x)\, dx$ என்பதை ஏன் தொகை என்று சொல்கிறேம் என்பதும், குறியீட்டில் 'dx' எழுதவேண்டிய அவசியமும் புலனுகும்.]

கணக்கு 1 : $y^2 = 4 - x$, x அச்சு, y அச்சு— இவையடக்கிய பரப்பு x அச்சைச் சுற்றிச்சுழல்வதால் ஏற்படும் உருளைத் திண்மத்தின் பருமன் என்ன?

x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதால் சூத்திரம்

$$V = \int_a^b \pi \, y^2 \, dx$$

y அச்சு பரப்பின் பக்கம் என்பதால் $a = o$
x அச்சை $y^2 = 4 - x$ வெட்டும் புள்ளியின் x கூறு
b ஆகும். $y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 4$

$$\therefore \quad b = 4$$

$$\therefore \quad V = \pi \int_0^4 (4 - x) \, dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$= \pi \, [16 - 8]$$

$$= 8 \, \pi \text{ க. அலகுகள்.}$$

கணக்கு 2 : மேற்கூறிய பரப்பு y அச்சைச் சுற்றிச் சுழன்ருல் ஏற்படும் உருளைத் திண்மத்தின் பருமன் என்ன?

$$\text{சூத்திரம் } V = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$

y இன் கீழ் நிலை 0; மேல் நிலை, வரை y அச்சை வெட்டும் புள்ளியின் y உறுப்பு ஆகும்.

$\therefore$ $x=0$ எனப் பிரதியிட $y^2=4$ $\therefore$ $y=+2$ or -2

இதில் $b=2$

$$\therefore \text{ பருமன் } V = \int_0^2 \pi x^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^2 (4-y^2)^2 \, dy$$

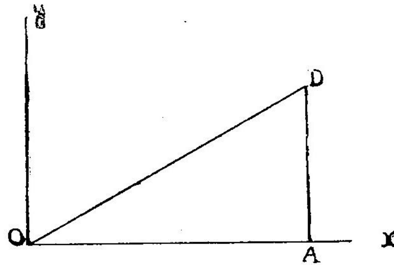
$$= \pi \int_0^2 (16-8y^2+y^4) \, dy$$

$$= \frac{256 \, \pi}{15} \text{ க. அலகுகள்.}$$

கணக்கு 3 : அடிப் பக்கத்தின் ஆரம் r அலகுகளும் குத்துயரம் h அலகுகளும் உள்ள கூருருளையின் பருமனை நுண்கணிதத்தால் கணக்கிடுக.

மூலப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்கோடு OD ஆகுக.

Dஇன் கூறுகள் (h, r) ஆகுக.



படம் 18

AOD எனும் பரப்பு x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல, கூருருளை வருகிறது.

ODஇன் சமன்பாடு $y = \frac{r}{h} x$

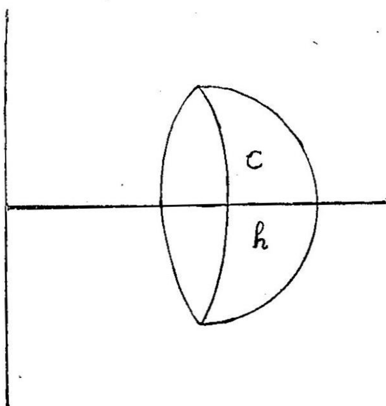
$$\therefore \quad V = \pi \int_{0}^{h} y^2 \, dx$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_{0}^{h} x^2 \, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

கணக்கு : ஒரு கோளத்திலிருந்து, h அலகு உயரமுள்ள கிண்ணம் வெட்டப்படுகிறது. வெட்டுமுகத்தின் ஆரம் c என்ருல் கிண்ணத்தின் கொள்ளளவு என்ன?

ஓர் அரை வட்டம் சுழல்வதால் அரைக் கோளம் ஏற்படுகிறது.



படம் 19

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகுக. x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதாகக் கொள்வதால்

$$V = \pi \int y^2 \, dx$$

கீழ் நிலை $(a - h)$; மேல் நிலை a

$$\therefore \quad V = \pi \int_{(a-h)}^{a} y^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{(a-h)}^{a} (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{a-h}^{a}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{3} \left\{ 3a^2 x - x^3 \right\}_{a-h}^{a}$$

$$\therefore \quad f(a) = \frac{\pi}{3} [3a^3 - a^3] = \frac{2}{3} \pi a^3$$

$$f(a-h) = \frac{\pi}{3} [3a^2 (a-h) - (a-h)^3]$$

$$= \frac{\pi}{3} (a-h) [3a^2 - a^2 + 2ah - h^2]$$

$$= \frac{\pi}{3} (a-h) [2a^2 + 2ah - h^2]$$

$$= \frac{11}{3} \left\{ 2a^3 + 2a^2 h - ah^2 - 2a^2 h - 2ah^2 + h^3 \right\}$$

$$\therefore \quad f(a) - f(a-h) = \frac{\pi}{3} [3ah^2 - h^3]$$

கொள்ளளவு $= \frac{\pi}{3} (3ah^2 - h^3)$

ஆனல் $(a-h)^2 + c^2 = a^2$

$$a^2 - 2ah + h^2 + c^2 = a^2$$

$$\therefore \quad a = \frac{c^2 + h^2}{2h}$$

இதை aக்குப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க—

$V = \frac{\pi h}{6} (3c^2 + h^2)$ எனக் காணலாம்.

பயிற்சி 18

கீழ்வரும் உருளைத் திண்மங்களின் பருமன் கணக்கிடுக.

1. $y = \sin x$ எனும் ஒரு வில் x அச்சைச் சுற்றுவதால் வரும் திண்மம்.

2. $y = \cos x$ எனும் வரை, y அச்சு, x அச்சு இவற்றிடையே யுள்ள பரப்பு x அச்சைச் சுற்றுவதால் வரும் திண்மம்.

3. $y = \cos x - \sin x$ எனும் வரை, y அச்சு, x அச்சு — இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு, x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல் வரும் திண்மம்.

4. $y^2 = 4ax$ எனும் வரை; x அச்சு, $x = a$ — இவற்றிடையே யுள்ள பரப்பு, x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதால் வரும் திண்மம்.

5. $y = 9x - x^2 - 14$ எனும் வரைக்கும் x அச்சுக்கும் இடையே யுள்ள பரப்பு x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல வரும் திண்மம்.

6. $y = \sin x$, $y = \cos x$, y அச்சு — இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு y அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதால் வரும் திண்மம்.

7. $y^2 = 12(3 - x)$, y அச்சு இவற்றிடையேயுள்ள பரப்பு y அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதால் வரும் திண்மம்.

6. சில வினாத்தாள்கள்

1

1. (a) $y = f(x)$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ என்ன என்பதை விளக்குக.

(b) வரையறையிலிருந்து $\frac{d}{dx}(\tan x)$ ஐக் காண்க.

(c) $a(x+y) = x^2+y^2$ என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்ன ?

2. (a) $y = x^2 - 3x + 5$ எனும் வளைவரைக்கு $x = 2$ எனும் x கூறுடைய புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காணவும்.

(b) கனமில்லாத உலோகத் தகட்டால், சதுர அடிப் பக்கமும் மூடியில்லாததுமான ஒரு பெட்டி செய்யவேண்டும். அதன் கொள்ளளவு 32 க. அடி ஆக இருக்கவேண்டும். இவ்வாறு செய்வதற்காகும் உலோகத் தகட்டின் மிகக் குறைந்த பரப்பு என்ன ?

3. (a) மதிப்பு காண்க: (i) $\int (x^3 + 1)\, x^2\, dx$

(ii) $\int (\cos x - \cos 2x)\, dx$ (iii) $\int_0^{\pi/6} \sin 3t\, dt$

(b) $y^2 = 4x$; $x = 0$, $x = 4$ எனும் வரைகளிடையே உள்ள பரப்பு x அச்சைச் சுற்றிச் சுழல்வதால் ஏற்படும் திண்மத்தின் பருமன் என்ன ?

2

1. (a) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ என நிறுவுக.

(b) வகைக்கெழு காண்க :

(i) $x \sin x$ (ii) $\sqrt{a^2 - x^2}$

2. (a) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருண்மையுடைய வாயுவின் கொள்ளளவுக்கும் (v), அமுக்கத்திற்கும் (p) இடையே உள்ள தொடர்பு $v = \frac{800}{p}$. $p = 40$ ஆக இருக்கும்போது p மாறினால் v என்ன வீதத்தில் மாறுகிறது ?

(b) $x^2 + y^2 = 25$ என்ற வளைவரையில் $3x + 4y = 0$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு இணையாக அமையும் தொடுகோடுகள் அமையும் புள்ளிகளைக் காண்க.

3. (a) காண்க : (i) $\int (x^5 - 3x^2 + 1)\, dx$ (ii) $\int \sin 2x\, dx$

(iii) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

(b) $y = x^2 - 7x + 10$ எனும் வரைக்கும் x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பினைக் கணக்கிடுக.

3

1. (a) வரையறையிலிருந்து $3x^2 - x$ எனும் சார்பலனின் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க.

(b) x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க.

(i) $x^2 \cos 4x$ (ii) $\left(x + \frac{2}{x}\right)^3$

2. (a) ஒரு கோளத்தின் பருமன் வினாடிக்கு 2 க. அங். வீதம் அதிகமாகிறது என்றால் அதன் புறப்பரப்பு, ஆரம் 4அங். இருக்கும்போது என்ன வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது?

(b) ஒரு நேருருளைக்கலன் மூடியுள்ளதாயும் ஒரு குறிப்பிட்ட கொள்ளளவுள்ளதாயும் இருக்கவேண்டும். அதன் புறப்பரப்பு மிகவும் குறைவாக இருக்க அதன் விட்டம் உயரத் திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

3. (a) தொகை காண்க : (i) $x^2 - 7x + 2$ (ii) $\sin 3x \sin x$

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(c) $y = 10 - 3x - x^2$ எனும் வரைக்கும், x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பினைக் கணக்கிடுக.

4

1. (a) x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க :

(i) $\sin^3 4x$ (ii) $\cos 3x \, (2x-x^2)^5$

(b) நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகள் 't' நேரத் தில் மூலப் புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் உள்ளது. அதன் வேகம் $= kx^2$ என்ருல் முடுக்கம் x^3 உடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

2. (a) $2y = x^2 (x-5) + 10$ என்ற வரைக்கு 4 எனும் x கூறுடைய புள்ளியில் அமையும் தொடுகோட்டின் சமன் பாட்டைக் காண்க.

(b) குறிப்பிட்ட சுற்றளவுள்ள செவ்வகங்களில் மிகவும் அதிகமான பரப்புடையது சதுரமே என நிறுவுக.

3. (a) தொகை காண் : (i) $\int (2x-1)^2 (3x + 4) \, dx$

(ii) $\int \cos^2 x \sin x \, dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \sin 3x \, dx$

(b) 3 அடி ஆரமுள்ள கோளத்தின் மையத்திலிருந்து 1 அடி தூரத்தில் ஒரு தளத்தால் வெட்ட ஒரு கிண்ணம் வரு கிறது. அதன் கொள்ளளவு என்ன ?

5

1. (a) வரையறையிலிருந்து $x^4 + \sqrt{2}$ எனும் சார் பலனின் x ஐப் பற்றிய வகைக்கெழு காண்க

(b) வகைக்கெழு காணவும் : (i) $x^4(2x+3)^3$

(ii) $8 \cos 7x \sin^2 x$

(c) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $S = 4\pi r^2$ என்றால் $\frac{dv}{ds}$ இன் மதிப்பை r இன் சார்பலனைக் காணவும்.

2. (a) $3x - y + 5 = 0$ எனும் நேர்கோட்டிற்கு இணையாக $y = x^3 - x^2 - 5x + 5$ எனும் வரைக்கு அமையும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(b) ஒரு நேர் கோட்டில் O எனும் புள்ளியிலிருந்து இயங்கும் புள்ளியின் தூரம் s, 't' நேரத்தில் $s = 35t + 21t^2 - 14t^3$ எனும் தொடர்பால் தரப்படுகிறது. முதல் விநாடி முடிவில் அதன் வேகம் என்ன ? முடுக்கம் என்ன ? முடுக்கம் எப்போது பூச்சியமாகிறது ?

3. (a) மதிப்பு காண் : (i) $\int \cos^3 x \, dx$

(ii) $\int_0^{\pi/6} (\sin 2x + \cos 2x - x) \, dx$

(b) 'r' அலகு ஆரமுள்ள கோளத்திலிருந்து h அலகு உயரமுள்ள ஒரு துண்டு எடுக்கப்பட்டால் அதன் பருமன் என்ன?

கண இயற்கணிதம்

கண இயற்கணிதம்

(பாடத் திட்டம் : கணம், உட்கணம், பெருங்கணம், கணக்கூடுதல், கணவெட்டு, நிரப்புக்கணம், வெண்-பட விளக்கம், சமனின்மைத் தீர்வுக் கணங்களின் படவிளக்கம். (i) $ax+b \lesseqgtr 0$ (ii) $ax^2+bx+c \lesseqgtr 0$. (iii) $ax+by+c \lesseqgtr 0$, ஒன்றற்கொன்று இணைத்தல் அல்லது ஒரு கணத்தை மற்றொரு கணமாக "மாற்றம்" (mapping) செய்தல் எனும் கருத்துள்ள சார்பலன் (function concept) விளக்கம், சார்பலனின் அரங்கமும், வீச்சும்.)

‘கண’ இயற்கணிதம்

(set Algebra)

1.1 முன்னுரை : சாதாரண இயற்கணிதத்தில் (classical algebra), பொது எண்கள், மாறிகள், சார்பலன்கள் முதலியன கூறப்படுகின்றன. இதில், நடைமுறை எண்களுக்குப் பதிலாக, எண்களைப் பொதுக்குறியீட்டால், அதாவது, a, b, c, x, y, z முதலிய எழுத்துக்களால் குறித்து, அவையிடையே நிலவும், பல தொடர்புகள் பொதுவாக விவரிக்கப்படுகின்றன. தற்காலத்தில் ‘இயற்கணிதம்’ என்னும் சொல்லுக்கு இன்னும் விரிவான பொருள் கற்பிக்கப்படுகிறது. கணிதச் செயல்களுக்குத் தலையாய இடமளித்து, எண்களாயினும் சரி, வேறு விளக்கப்படாத என்ன உறுப்புக்களாயினும் (undefined elements) சரி, அவைகளின் பலவிதச் சேர்க்கைகளையும் அவற்றின் பயன்களையும் கூறுவதே ‘இயற் கணிதம்’ (Algebra) என விரிவடைந்த கருத்து ஏற்பட்டுள்ளது. இதன் பயனாக வெக்டார் ஆல்ஜீப்ரா (Vector algebra), மெட்ரிக்ஸ் ஆல்ஜீப்ரா (Matrix algebra), ஒருபடிச் சேர்க்கை ஆல்ஜீப்ரா (Linear algebra) எனப் புதுமுறை இயற்கணிதங்கள் தோன்றியுள்ளன. இத்தகைய பல்வேறு நவீனக் கணிதப் பிரிவுகளில் ஊடுருவி அடிப்படையாக நிற்கும் ‘கணம்’ (Set) எனும் கருத்தையும் அதனில் ஏற்படும் சில எளிய ‘செயல்களையும்’ (Operations) மட்டும் இங்குக் கூறுவோம்.

1.2 கணம் (Set) : வரையறை (Definition) :

திட்டமாகக் கூறப்பட்ட உறுப்புக்களின் தொகுதி ‘கணம்’ (Set) எனப்படும்.

(எடுத்துக்காட்டு) : (i) 1, 3, 7, 10 எனும் எண்கள்.

(ii) சென்னை, மதுரை, சேலம், கோவை, திருச்சி. (iii) க, ச, ட, த, ப, ற. (iv) $x^2-3x-4=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். (v) 2 ஐ விடப் பெரிய முழு எண்கள். (vi) தமிழ்நாட்டு மாவட்டங்களின் தலை நகரங்கள்.

இங்கு இரண்டு முறைகளைக் கையாண்டுள்ளோம். (i) முதல் மூன்று எடுத்துக் காட்டுக்களில் உறுப்புக்கள் எல்லாவற்றையும் ஒவ்வொன்றாக எடுத்துக் காட்டியுள்ளோம் (listed). (ii) அடுத்த மூன்று எடுத்துக்காட்டுக்களில் பொதுப் பண்பைக் கூறி உறுப்புக்களைக் காட்டியுள்ளோம்.

1.3 'கண'க் குறியீடுகள் (Set notations) :

(i) A, B, C, G, S என்பன போன்று ஆங்கிலப் பெரிய எழுத்துக்களால் 'கண'ங்கள் குறிக்கப்படும்.

(ii) கணத்திலுள்ள உறுப்புக்கள் 'கண' மூலங்கள் (Elements of the set) எனப்படும். அவைகளை a, b, c, x, y என்பன போன்ற ஆங்கிலச் சிறு எழுத்துக்களால் குறிப்போம்.

மூலங்கள் யாவற்றையும் ஒவ்வொன்றாக எழுதிக் கணத்தைக் கூறலாம். மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டுக்களில் முதல் மூன்றைக் கீழ்வருமாறு எழுதவேண்டும்.

$A=\{1, 3, 7, 10\}$

$X=\{$சென்னை, மதுரை, சேலம், கோவை, திருச்சி$\}$

$G=\{$க, ச, ட, த, ப, ற$\}$

அடுத்த மூன்றையும் பின்வருமாறு எழுதவேண்டும்.

$A=\{x \mid x$ என்பது $x^2-3x-4=0$ இன் மூலங்கள்$\}$

$B=\{x \mid x>2$ எனும் முழு எண்கள்$\}$

$C=\{c \mid c$ என்பது மாவட்டங்களின் தலைநகர்கள்$\}$

(iii) x எனும் மூலம் A எனும் கணத்தில் உள்ளது என்பதை $x \in a$ எனக்குறிக்க வேண்டும். y எனும் மூலம் A எனும் கணத்தில் இல்லை என்பதை $y \notin A$ எனக் குறிக்கவேண்டும்.

(எ–டு.) $A=\{2, 4, 6, 8\}$ என்றால் $6 \in A$ ஆனால் $5 \notin A$.

1.4 சம கணங்கள் (Equal sets) :

A இல் உள்ள மூலங்கள் யாவும் B இல் அடங்கியும், B இல் உள்ள மூலங்கள் யாவும் A இல் அடங்கியும் அமைந்தால் இரு

கணங்களும் சமம் எனப்படும். இது $A=B$ எனக் குறிக்கப் படுகிறது.

(எ-டு.) (1) $A=\{1, 2, 2, 3, 4\}$
$B=\{3, 2, 1, 4\}$ இங்கு $A=B$

(எ-டு.) $A=\{x: x^2-3x+2=0$ இன் மூலங்கள்$\}$
$G=\{1, 2\}$
$S=\{1, 2, 2, 1\}$ இங்கு $A=G=S$.

1.5 பூச்சியக் கணம் (Null Set) :

ஒரு கணத்தில் மூலங்களே இல்லை எனில் அதையும் கணம் எனக் கொள்வோம். அத்தகைய கணம் 'பூச்சியக் கணம்' எனப்படும். $\varnothing$ எனும் குறியீடு இதைக் குறிக்கும்.

$A=\{x : x^2=4$ என்பதற்கேற்ற ஒற்றை எண்$\}$
இங்கு $A=\varnothing$

1.6 உட்கணம் (Sub set) :

(i) B எனும் கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலமும் A எனும் கணத்தில் அடங்கினால், B என்பது Aஇன் உட்கணம் எனப்படும்.

$$A=\{1, 3, 7, 10\} ; \qquad B=\{10, 3, 7\}$$

இங்கு B என்பது Aஇன் உட்கணம்; ஆனால் B, Aக்குச் சமமல்ல; இத்தகையது சரியான உட்கணம் (Proper sub set) எனப்படும். B, A இன் உட்கணமென்பதை $B\subset A$ எனக் குறியீட்டால் கூறப்படும்.

(ii) $B=\{10, 3, 7\}$ $\qquad C=\{3, 7, 10\}$

இங்கும் B, Cஇன் உட்கணமாகும். அத்துடன் C உம் B இன் உட்கணமாக இருக்கிறது.

$B\subset C$ எனவும், $C\subset B$ எனவுமானால், $B=C$ ஆகும்.

B எனும் கணம் Dஇன் சரியான உட்கணமாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருக்கிறதென்பதை $B\subseteq D$ எனும் குறியீட்டால் எழுதவேண்டும்.

குறிப்பு : $A\subseteq B$; $B\subseteq C$ என்றால் $A\subseteq C$ ஆகும.

நிரூபணம் : $x \in A$ ஆகுக.

$\therefore$ $x \in B$ (உட்கண விளக்கம்)

$\therefore$ $x \in C$ [இது A இலுள்ள எல்லா மூலங்களுக்கும் பொருந்தும்.]

$\therefore$ $A \subseteq C$.

பெருங் கணம் (Super set) : A எனும் கணம் Bஇன் உட்கணமானால் $B \supset A$ எனவும் எழுதலாம். B எனும் கணம் A எனும் கணத்தைத் தன்னுள் கொண்டது எனப் பொருளாகும். அப்போது B என்பது A இன் பெருங் கணம் (super set) எனப்படும்.

குறிப்பு 1 : A எனும் கணம், B இன் உட்கணமல்ல என்பதை $A \not\subset B$ எனவும், B எனும் கணம் A ஐத் தன்னுள் கொண்டதல்ல என்பதை $B \not\supset A$ எனவும் எழுதுகிறோம். $A \not\subset B$ என்றால் B இல் இல்லாத குறைந்தது ஒரு மூலமாவது A இல் உண்டு என்பது பொருளாகும்.

குறிப்பு 2 : $\varnothing$ எனும் பூச்சியக் கணம், எல்லாக் கணங்களின் உட்கணம் என்பது கவனிக்கத் தக்கது.

1.7 அகில கணம் (Universal set or Universe).

சில கணங்களை எடுத்துக்கொண்டு கணக்கிடும்போது, அவை யாவும் ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களாக இருக்கும். அத்தகைய கணம் 'அகிலம்' எனப்படும். இதைக் குறிக்கப் பல குறியீடுகள் உள்ளன. இங்கு அதை U எனும் ஆங்கில எழுத்தால் குறிப்போம்.

(எ-டு.) (i) முழு எண்கள், நேரெண்கள், விகிதமுறு எண்கள் — இவைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு கணமாகும். இவை யாவையும் அடக்கிய 'அகிலம்' மெய்யெண் (Real number set) கணமாகும்.

(ii) சமதள வரை கணிதத்தில், புள்ளிகள் யாவும் சேர்ந்து அகிலமாகும். நேர்கோடுகள், வட்டங்கள், மற்றும் பல வளை வரைகள் இதன் உட்கணங்களாகும்.

(iii) 0 முதல் 9 வரை உள்ளச் சிற்றிலக்கங்கள் அகிலமாகும். 3 சிற்றிலக்க எண்களைக் கொண்டால், ஒவ்வொரு சிற்றிலக்கத் தொகுதியும், அந்த அகிலத்தின் உட்கணமாகும்.

(iv) ஒரு கல்லூரியில் படிக்கும் மாணவர்கள் அகிலமாகும். ஒவ்வொரு சிறப்புப் பாடத்தைப் படிக்கும் மாணவர் பிரிவுகள் அதன் உட்கணங்களாகும்.

(v) $A = \{ a, b \}$ $B = \{ b, c \}$ $C = \{ c, a \}$

$D = \{ b, a \}$ $E = \{ c, b \}$ $F = \{ a, c \}$

எனும் கணங்களை மட்டும் ஆராய்ந்தால் இவற்றின் அகிலம் $U = \{a, b, c\}$ என்பதாகும்.

1.8 அடுக்குக் கணம் (Power set) :

ஒரு கணத்தின் எல்லா உட்கணங்களையும் மூலங்களாகக் கொண்ட கணம் அடுக்குக் கணம் எனப்படும்.

(எ-டு.) (i) $M = \{ a, b \}$ என்பதோர் கணமாகுக. இதன் அடுக்குக் கணம் 2^M எனக் குறிக்கப் பெறும்.

$$2^M = \Big\{ \{ a, b \}, \{ a \}, \{ b \}, \varnothing \Big\}$$

(ii) $T = \{ 2, 5, 7 \}$ என்றால்

$$2^T = \Big\{ \{2, 5, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{5, 7\}, \{2\}, \{5\}, \{7\}, \varnothing \Big\}$$

குறிப்பு : S எனும் கணத்தில் n மூலங்கள் இருந்தால் 2^S கணத்தில் 2^n மூலங்கள் இருக்கும்.

1.9 சேராக் கணம் (Disjoint set) :

இரண்டு கணங்களிடையே பொது மூலம் ஒன்றேனும் இல்லை எனில் அவை சேராக் கணங்கள் எனப்படும்.

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

$S = \{ x : x$ நேர் முழு எண்கள் $\}$

$T = \{ x : x$ எதிர் முழு எண்கள் $\}$

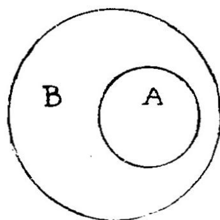
இங்கு A உம் B உம் சேராக் கணங்கள். S உம் T உம் சேராக் கணங்கள்.

1.10 ஒப்பிடு கணம் (Comparable set) : $A \subset B$ என்றால் A உம் B உம் ஒப்பிடு கணங்கள் எனப்படும்.

1.11 வெண்–பட விளக்கம் (Venn-diagrams) **:**

கணங்களிடையேயுள்ள தொடர்புகளை விளக்க அவற்றைப் பரப்பால் (areas) குறிக்கலாம். சாதாரணமாக அவை வட்டப் பரப்புக்களால் காட்டப்படும்.

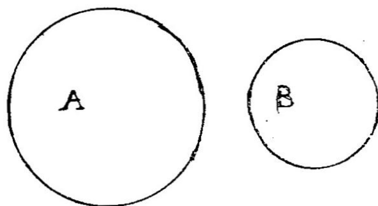
(i) $A \subset B$ என்பது, பெரிய வட்டத்தால் Bஉம் அத



படம் 20

னுள் அடங்கும் ஒரு சிறிய வட்டத்தால் A உம் காட்டப்படும்.

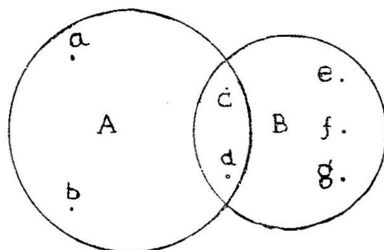
(ii) Aஉம் Bஉம் சேராக் கணங்களானல் ஒன்றையொன்று



படம் 21

வெட்டாத இரு வட்டங்களால் அவை காட்டப்படும்.

(iii) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{c, d, e, f, g\}$ என்ருல் படத்தில் உள்ளது போல் காட்டலாம். A இன் வட்டமும் B இன்



படம் 22

வட்டமும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும். அவற்றின் பொதுப் பரப்பு, (c, d) எனும் பொதுக் கணங்களைக் குறிக்கும்.

2. கணச் செயல்கள்

(Set operations)

1. கணக் கூடுதல் (Union of sets) :

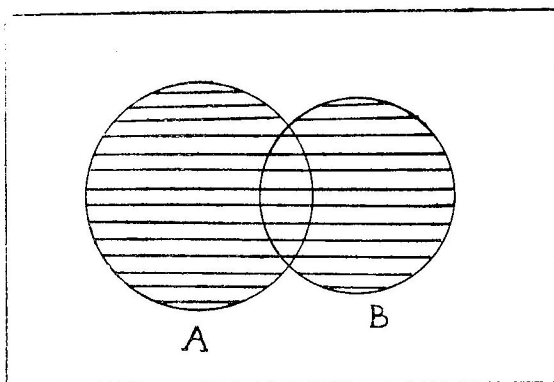
A என்ற கணத்திலாவது அல்லது B என்ற கணத்திலாவது அமையும் மூலங்களின் தொகுதி, A, B என்ற கணங்களின் கூடுதல் எனப்படும். இது $A \cup B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

[A இலும் B இலும் அமையும் மூலங்களும் இதனுள்படும்.]

மேற்கூறியதைப் பின்வருமாறு குறியீட்டில் (in set notations) கூறலாம் :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ அல்லது } x \in B\}$$

இதன் பட விளக்கம் :

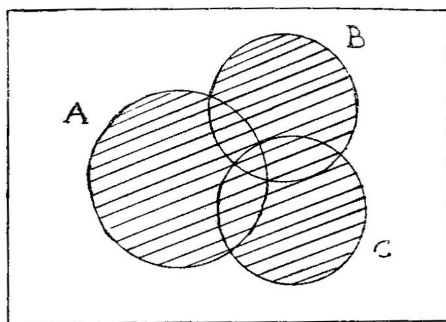


படம் 23

இங்குச் செவ்வகம் மூலங்களின் 'அகிலத்தை'க் குறிக்கிறது. A, B எனும் கணங்கள் வட்டங்களால் காட்டப்பட்டுள்ளன. கோடுகளால் நிரப்பப்பட்ட பரப்பு, $A \cup B$ஐக் காட்டுகின்றது.

குறிப்பு 1 : படத்தினின்று $A \cup B = B \cup A$ எனத் தெளிவாகிறது. ஆகவே 'கணக்கூடுதல்' மாற்று விதிக்கு (commutative law) அடங்கியது எனத் தெளிவாகிறது.

குறிப்பு 2 : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ என்பதையும்



படம் 24

படத்தால் காணலாம். கணக்கூடுதல், சேர்க்கை விதிக்கும் (Associative law) உட்பட்டது எனக் காணலாம்.

[சாதாரண ஆல்ஜீப்ராவில் $a+b=b+a$ என அறிவோம். இது எண்கள் மாற்று விதிக்கு அடங்கியது எனக் கணிதத்தில் கூறப்படுகிறது. $(a+b)+c = a+(b+c)$ என்பதால், எண்கள் சேர்க்கை விதிக்கு (associative law) அடங்கியது எனக் கூறப் படுகிறது. இவ்விரு விதிகளினுல் எண்களை எந்த வரிசையில் கூட்டினுலும் அவற்றின் கூடுதல் ஒன்றே என வருகிறது இந்த விதிகள் கணக் கூடுதலுக்கும் பொருந்தும் என மேலே காட்டியுள்ளோம்.]

குறிப்பு 3 : A உம் B உம் $A \cup B$ எனும் கணத்தின் உட் கணங்களாகும். அதாவது

$$A \subset (A \cup B)$$
$$B \subset (A \cup B)$$

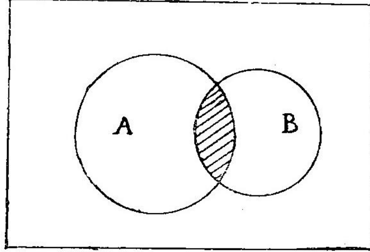
[$A \cup B$ என்பதை A கூடுதல் B எனப் படிக்கவும். ஆங்கிலத்தில் A union B என்றே அல்லது A cup B என்றே படிக்கவும்.]

2. கண வெட்டு (Intersection of sets) :

A இலும் B இலும் ஒருங்கே உள்ள மூலங்களின் தொகுதிக் கணம், A, B என்ற கணங்களின் 'வெட்டு' எனப்படும். இதை $A \cap B$ எனக் குறிக்கவேண்டும். குறியீட்டில் பின்வருமாறு விளக்கப்படும்.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \quad x \in B\}$$

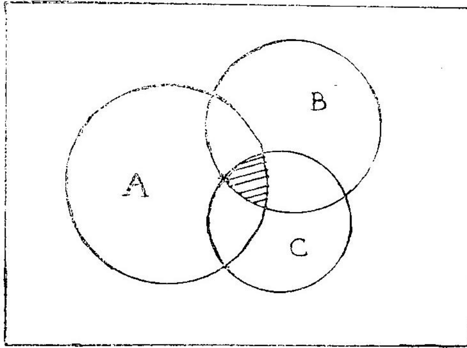
படத்தில் பின்வருமாறு காட்டப்படும். கோடிட்ட பரப்பு $A \cap B$ எனும் கணமாகும்.



படம் 25

குறிப்பு 1 : படத்திலிருந்து $A \cap B = B \cap C$ என்பது தெளிவாகிறது. கண வெட்டும் மாற்று விதிக்கு (commutative law) உட்பட்டது எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என்பதும் பட விளக்கத்தால் தெளிவுறும்.

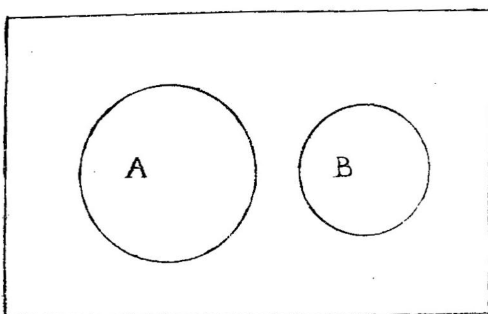


படம் 26

குறிப்பு 3 : $A \cap B \subset A$ எனவும், $A \cap B \subset B$ எனவும் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 4 : A, B என்பவை சேராக் கணங்களானல் $A \cap B = \emptyset$ எனவும் காண்கிறோம்.

[$A \cap B$ என்பதை A வெட்டு B எனப் படிக்கவும். ஆங்கி



படம் 27

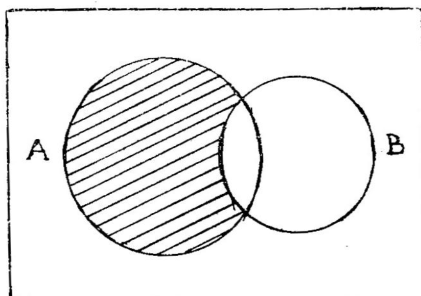
லத்தில் இதை A intersection B எனவோ, அல்லது A cap B எனவோ படிப்பது வழக்கம்,]

இரு கணங்களின் வித்தியாசம் :

A இல் மட்டும் அடங்கி, B இல் அடங்காத மூலங்களைக் கொண்ட கணம் A கழித்தல் B எனப்படும். இது $A-B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

$A-B=\{x \mid x \in A, x \notin B\}$ என்ற குறியீட்டில் மேலே கூறியுள்ள வாசகம் கூறப்படும்;

இதன் படவிளக்கம் :



படம் 28

கோடிட்ட பரப்பு $A-B$ எனும் கணத்தைக் காட்டுகிறது.

குறிப்பு 1 : $A-B \pm B-A$

குறிப்பு 2 : $A-B \subset A$

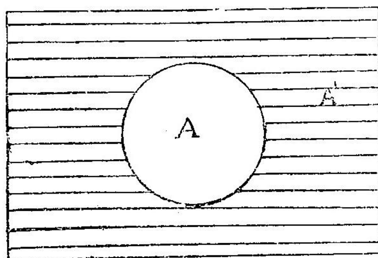
குறிப்பு 3 : A உம், B உம் சேராக்கணங்களானல் $A-B=A$

குறிப்பு 4 : $A-B$, $A\cap B$, $B-A$, —இவை மூன்றும் ஒன்றற்கொன்று சேராக் கணங்களாகும்.

நிரப்புக் கணம் (Complement set) :

A என்ற கணத்தில் இல்லாத, அகிலத்தில் உள்ள மற்றெல்லா மூலங்களும் சேர்ந்த கணம் A இன் நிரப்புக் கணம் (Complement set of A) ஆகும். இதை A' எனக் குறிப்போம். [$\overline{A}$ எனவும் குறிப்பதுண்டு.] U அகில கணமானல்

$A'=U-A$ படத்தில் பின்வருமாறு காட்டப்படும்.



படம் 29

குறியீட்டில் $A'=\{x\mid x\in U,\ x\notin A\}$
அல்லது சுருக்கமாக $A'=\{x\mid x\notin A\}$

குறிப்பு : கீழ்வருவனவற்றை எளிதில் அறியலாம்.

(i) $A\cup A' = U$

(ii) $A\cap A' = \varnothing$

(iii) $U' = \varnothing$

(iv) $\varnothing' = U$

(v) $(A')' = A$

(vi) $A-B = A\cap B'$

[vi ஏனெனில் $A-B=\{x\mid x\in A\ x\notin B\}$

$=\{x\mid x\in A\ x\in B'\}$

$=A\cap B'$]

பயிற்சி

1. கீழ்வருவனவற்றைக் 'கணக்குறியீட்டில்' எழுதுக :

(i) 'a' என்பது E எனும் கணத்தின் ஒரு மூலம்.

(ii) H எனும் கணம், D எனும் கணத்தின் உட்கணம்.

(iii) x என்பது A எனும் கணத்தைச் சார்ந்ததல்ல.

2. $M = \{ r, s, t \}$ ஆனால், கீழே தருபனவற்றுள் எது சரி, எது சரியல்ல என்பதைக் காரணங்களுடன் கூறுக. (i) $r \in M$ (ii) $r \subset M$ (iii) $\{r\} \in M$ (iv) $\{r\} \subset M$

3. வாக்கியங்களால் கீழ்வரும் குறியீடுகளை விரித்து எழுதுக; பிறகு பட்டியல் முறையில் கணங்களைக் கூறுக.

(i) $A = \{x \mid x^2 = 4\}$

(ii) $B = \{x \mid x - 5 = 6\}$

(iii) $C = \{x \mid x$ என்பது 'வெளிப்படை' என்பதில் உள்ள எழுத்துக்கள்$\}$

4. கீழ்வரும் கணங்களில் எவை சமம்?

$\{a, b, c,\}$; $\{ac, ab\}$, $\{c, b, a, a\}$, $\{c, b\ c, a\}$

5. கீழ்வரும் கணங்களில் எவை பூச்சியக்கணங்கள்?

(i) $A = \{x \mid x$ என்பது அ எனும் எழுத்துக்கு முந்திய எழுத்து$\}$

(ii) $B = \{x \mid x^2 = 9$ எனும்படியுள்ள மெய்யெண்$\}$

(iii) $D = \{x \mid x^2 = 4\}$

(iv) $C = \{x \mid x \neq x\}$

(v) $E = \{x \mid x + 8 = 8\}$

5. $P = \{a, b, c\}$ என்றால் Pஇன் உட்கணங்கள் எல்லாவற்றையும் எழுதுக.

6. உட்கணமில்லாத கணங்கள் யாவை?

7. $A = \{2,3,4,5\}$ $B = \{x \mid x$ இரட்டையெண்$\}$ என்றால் Bஇன் உட்கணமாக A இருக்க முடியாதென நிறுவுக.

8. $V=\{d\}$, $W=\{c,d\}$, $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{a,b\}$, $Z=\{a,b,d\}$ என்றால், கீழ்வருபனவற்றில் எது சரி, எது சரியல்ல என்பதைக் கூறுக:

(i) $Y\subset X$ (ii) $W\neq Z$ (iii) $V\not\subset Y$ (iv) $Y\subset X$
(v) $X=W$ (vi) $W\not\supset V$ (vii) $Z\supset V$ (viii) $W\subset Y$

9. $A=\{r, s, t, u, v, w\}$, $B=\{u, v, w, x, y, z\}$, $C=\{s,u,y,z\}$, $D=\{u,v\}$, $E=\{s,u\}$, $F=\{s\}$. X என்பது நாம் காணவேண்டிய கணம். கீழ்வருவனவற்றிலிருந்து A, B, C, D, E, F என்பதுள் X க்குச் சமமான கணம் எது என்பதை ஒவ்வொன்றுக்கும் காண்க.

(i) $X\subset A$, $X\subset B$ (ii) $X\not\subset A$, $X\not\subset C$
(iii) $X\not\subset B$, $X\subset C$ (iv) $X\subset B$, $X\not\subset C$

10. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{3,4,5,6\}$ என்றால் கீழ்வருவன காண்க.

a. (i) $A\cup B$ (ii) $A\cup C$ (iii) $B\cup C$ (iv) $B\cup B$

b. (i) $(A\cup B)\cup C$ (ii) $A\cup(B\cup C)$ காண்க.

c. (i) $A\cap B$ (ii) $A\cap C$ (iii) $B\cap C$ (iv) $B\cap B$ காண்க.

d. (i) $(A\cap B)\cap C$ (ii) $A\cap(B\cap C)$ காண்க.

e. (i) $(A-B)$ (ii) $(C-A)$ (iii) $(B-A)$ (iv) $(B-C)$
(v) $(B-B)$ காண்க.

11. $U=\{1, 2, 3......8, 9\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$,
$B=\{2, 4, 6, 8\}$, $C=\{3, 4, 5, 6\}$ என்றால்

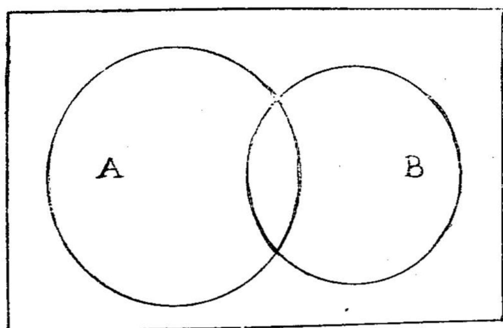
(i) A' (ii) B' (iii) $(A\cap C)'$ (iv) $(A\cup B)'$
(v) $(A')'$ (vi) $(B-C)'$ காண்க.

12. அடுத்த பக்கத்தில் காட்டியுள்ள வெண்—படத்தில் கோடிட்டுக் காட்டுக.

(i) B' (ii) $(A\cup B)'$ (iii) $(B-A)'$ (iv) $A'\cap B'$

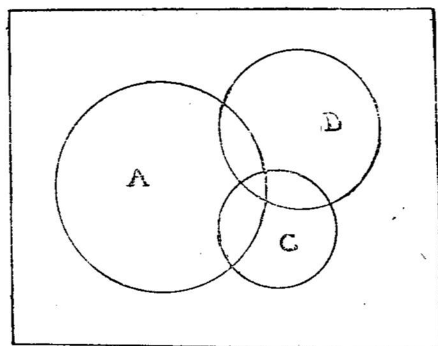
13. $U=\{a, b, c, d, e\}$ $A=\{a, b, d\}$ $B=\{b, d, e\}$ என்றால் (i) $A\cup B$ (ii) $B\cap A$ (iii) B' (iv) $B-A$ (v) $A'\cap B$ (vi) $A\cup B'$

(vii) $A' \cap B'$ (viii) $B' - A'$ (ix) $(A \cap B)'$ (x) $(A \cup B)'$ காண்க.



படம் 30

14. கீழே காட்டியுள்ள வெண் — படத்தில் கீழ் வருவனவற்றைக் கோடிட்டுக் காட்டுக.

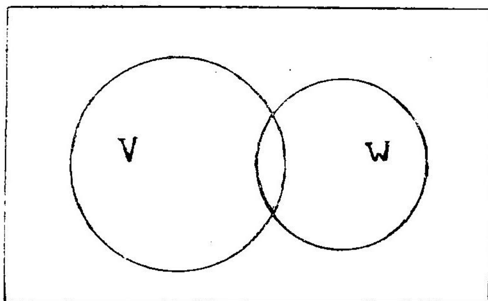


படம் 31

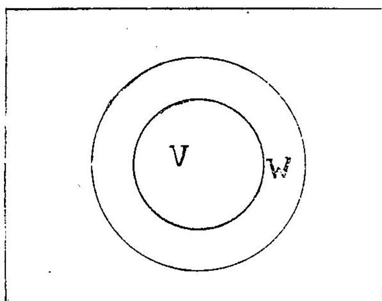
(i) $A \cap (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $A \cup (B \cup C)$ (iv) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

15. கீழே தரப்படும் இரண்டு படங்களில், கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளவற்றைக் கோடிட்டுக் காட்டுக.



படம் 32



படம் 33

(i) $V \cap W$ (ii) W' (iii) $W-V$ (iv) $V' \cup W$ (v) $V \cap W'$ (vi) $V'-W'$

16. A, B, C என்பவை மூன்று கணங்களானுல் கீழ்வரும் தொடர்புகளுக்கு வெண்—படங்கள் வரைக.

(1) $A \subset B$, அத்துடன் $C \subset B$ என்ருல் $A \cap B = \varnothing$

(2) $A \subset B$, அத்துடன் $C \not\subset B$, என்ருல் $A \cap C = \varnothing$

(3) $A \subset C$, $A \pm C$ என்ருல் $B \cap C = \varnothing$

(4) $A \subset (B \cap C)$, $B \subset C$, என்ருல் $C \pm B$, $A \pm C$

17. கீழ் வருவனவற்றைச் சுருக்கமாகக் காண்க.

(1) $U \cap A$ (2) $A \cup A$ (3) $\varnothing'$ (4) $\varnothing \cup A$ (5) $A' \cap A$ (6) U' (7) $U \cup A$ (8) $A' \cup A$ (9) $A \cap A$ (10) $\varnothing \cap A$

வெண் —படங்களால் கீழ்வரும் உண்மைகளை விளக்குக.

18. $A \cap B \subseteq A \cup B$

19. $A \cap B = A \cup B \Longleftrightarrow A = B$

20. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A' \supseteq B$

21. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$

22. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow C \subseteq A$

23. $A \cap B \subseteq C'$, அத்துடன் $A \cup C \subseteq B$ என்றால் $A \cap C = \varnothing$

24. $A \subseteq (B \cup C)'$, அத்துடன் $B \subseteq (A \cup C)'$ என்றால் $B = \varnothing$

25. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

26. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
இவ்விரண்டும் தெமார்கன் (De Meargan) விதிகள் எனப்படும்.)

27. கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக.

a) $A \cap V$ =—— b) $A \cup \varnothing$ =——
c) $A \cap \varnothing$ =—— d) $A \cup U$ =——
e) $A \cap A$ =—— f) $A \cup A$ =——
g) $A \cap (A \cup B)$=—— h) $A \cup (A \cap B)$=——

28. வெண்—படத்தால் விளக்குக.

a) $A \cap (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) $A \cup (B \cap C)$ d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
e) $(A \cup B)'$ f) $A' \cap B'$
g) $(A \cap B)'$ h) $A' \cup B'$

29. வெண்—படத்தால் விளக்குக.

a) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
b) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

இவற்றைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

(c) $B \cup (B' \cap A)$ (d) $B \cap (B' \cup A)$

எண் கணங்கள் (Sets of numbers) :

கணங்களின் முக்கியமான எண் கணங்களைப் பற்றிக் கூறுவோம். எண்களில், மெய்யெண்கள் ஒரு கணமாகும். மெய்யெண் கணத்தை R என்று குறிப்போம். சிக்கல் எண்கள் (Complex numbers) மற்றொரு கணமாகும். இதை C என்று குறிப்போம். $R \subset C$ என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது C இன் உட்கணமாக R எனும் கணம் அமைகிறது என்பதை அறிவோம்.

மெய்யெண்களின் ஓர் உட்கணம் முழு எண்கள் (Integers). இதை Z என்று நாம் குறித்தால் $Z \subset R$ எனக் காண்கிறோம். $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ எனக் குறிக்கலாம்.

இரு முழு எண்களின் விகிதமாகக் கூறப்படும் எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் (Rational numbers) எனப்படும். இத்தகைய எண் கணத்தை Q எனக் குறிப்போம். அப்போது $Q \subset R$, ; $Z \subset Q$ ஆகும்.

நேர் முழு எண்களாகிய 1, 2, 3,...... என்பவை சாதாரண எண்கள் (Natural numbers) எனப்படும். இத்தகைய எண் கணத்தை N என்போம். இவையன்றி p எனும் எண்ணின் காரணிகள் p, 1 என்பவை மட்டும் ஆகுக. அப்போது p என்பது பகா எண் (Prime number) எனப்படும். இத்தகைய பகா எண்கள் சேர்ந்த கணத்தை P எனக் குறிப்போம்.

R எனும் மெய்யெண் கணத்தை அகில கணமாகக் கொண்டால், விகிதமுறு எண் கணம் Q இன் நிரப்புக் கணம் Q', விகிதமுரு எண்களின் (Irrational numbers) கணமாகும். $\sqrt{3}$, π, $\sqrt{2}$, என்பவை இதன் மூலங்களாகும்.

தசமபின்னம் : ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணையும் தசம பின்னமாகக் கூறலாம். $\frac{3}{8} = \cdot 375000\ldots\ldots$ எனலாம் அல்லது $\frac{3}{8} = \cdot 374999\ldots\ldots$ எனவும் கூறலாம். $\frac{2}{11} = \cdot 181818\ldots\ldots$ விகிதமுறு எண்களை மீண்டும் மீண்டும் வரும் சிற்றிலக்கத் தொகுதியாய் முடிவுரு பின்னமாகக் கூற முடியும். விகிதமுரு எண்களிலும் முடிவுரு பின்னமாகக் கூற முடியும். ஆகவே தசம பின்னங்கள் சேர்ந்த கணமும், மெய்யெண் கணமும் சமமாகும்.

சமனின்மை (Inequalities) :

மெய்யெண்களை வரிசைப்படுத்தி எழுதலாம். அதாவது ஏறுவரிசையில் எழுதலாம். ஒவ்வோர் எண்ணும் அதன் முந்திய எண்ணைவிடப் பெரிய எண்ணாக இருக்குமாறு எண்களை வரிசைப்படுத்தி (in order) எழுதலாம்.

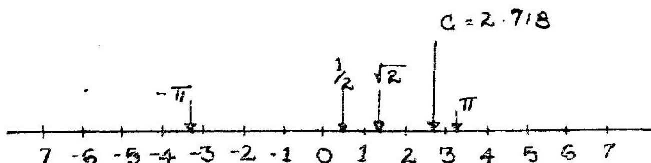
வரையறை : மெய்யெண் a ஆனது b ஐ விடச் சிறியதெனில் $b-a$ நேரெண்ணாகும். 'a, bஐ விடச் சிறியது' என்பதைக் குறியீட்டில் $a<b$ எனக் குறிக்கிறோம்.

a, b, c என்பவை மெய்யெண்களாயின்

1. $a<b$, $a=b$, $b<a$ என்ற மூன்று கூற்றுக்களில் ஒன்று சரியாக இருக்கவேண்டும்.
2. $a<b$, $b<c$ ஆனால் $a<c$ ஆகும்.
3. $a<b$ என்றால் $a+c<b+c$
4. $a<b$ ஆகவும், c நேரெண்ணாகவுமானால், $ac<bc$ ஆகும்.
5. $a<b$ ஆகவும், c எதிரெண்ணாகவுமானால், $bc<ac$ ஆகும்.

மெய்யெண் அச்சு (Real number line) :

மெய்யெண்களின் ஒரு தனிப் பண்பு, ஒவ்வோர் எண்ணையும் ஒரு நேர்கோட்டில் ஒரு புள்ளியுடன் பொருத்தலாம் என்பதாகும்,



படம் 34

$a<b$ என்றால் a ஐத் தரும் புள்ளி b ஐத் தரும் புள்ளிக்கு இடமாக இருக்கும்.

$a<b$ என்றால் a என்பது b ஐ விடச் சிறியது என்று கூறுவதை $b>a$; b, a ஐ விடப் பெரியது எனவும் கூறலாம் a, bஐ விடப் பெரியதல்ல என்பதை $a \ngtr b$ எனவோ அல்லது $a \leq b$ எனவோ குறியீட்டால் குறிக்கலாம்.

இடைவெளி (Intervel) :

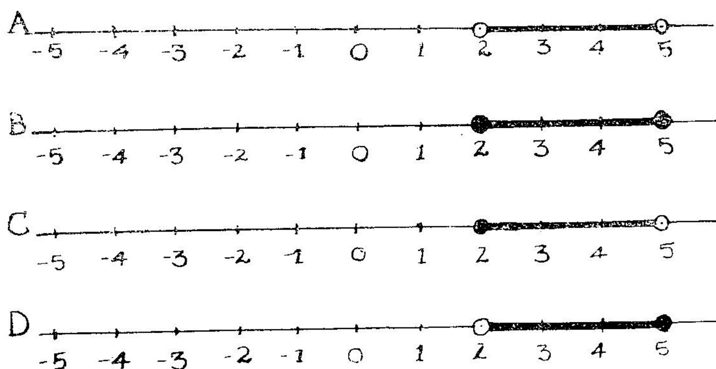
கீழே தரப்படும் எண்களைக் கவனியுங்கள் :

$$A = \{ x \mid 2 < x < 5 \}$$

$$B = \{ x \mid 2 \leq x \leq 5 \}$$
$$C = \{ x \mid 2 \leq x < 5 \}$$
$$D = \{ x \mid 2 < x \leq 5 \}$$

இத்தகைய எண் கணங்கள், 2 ஐயும் 5 ஐயும் முனை எண்களாக வுள்ள இடைவெளி எனப்படும். இவற்றுள் B எனும் இடைவெளி இரு முனை எண்களையும் மூலமாகக் கொண்டதால் முற்றுப்பெறும் (Closed Interval) இடைவெளி எனப்படும்.

A எனும் இடைவெளியில் இரு முனை எண்கள் மூலங்களல்லவாகையால் அது முற்றுறு (Open interval) இடைவெளி எனவும், C என்பது மேல் முற்றுறு இடைவெளியெனவும், D எனும் கணம் கீழ் முற்றுறு இடைவெளி எனவும் பெயர் பெறும். இத்தகைய சமனின்மையால் தரப்படும் இடைவெளிகளை மெய்யெண் அச்சில் கீழ்வருமாறு காட்டலாம்.



படம் 35

சமனின்மைத் தீர்வுக்கணங்களின் படவிளக்கம் :

சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளும் அவற்றின் படவிளக்கமும் நீங்கள் படித்திருப்பீர்கள். எடுத்துக்காட்டாக: $3x-6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $x=2$ என்பதாகும். மெய்யச்சில் 2 எனும் எண்ணைக் குறிக்கும் புள்ளி, இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காட்டுகிறது. இது போன்று $x^2-5x+6=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு மெய்யெண்களாகையால் அவை, (2; 3) என்பவை, மெய்யெண் அச்சில் காட்டப்படும்.

இது போன்று சமனின்மைகளின் தீர்வு எண் கணமாகும். அவற்றைப்படத்தால் விளக்கலாம்.

(எ-டு.) $3x - 17 < 0$ எனும் சமனின்மையில் x இயற்கையெண் எனின் தீர்வுகள் யாவை? படத்தால் விளக்குக.

$$3x<17 \quad \therefore x = \{5, 4, 3, 2, 1\}$$

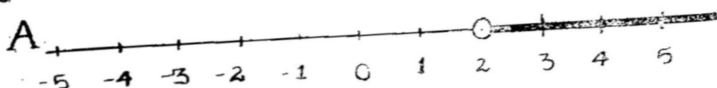
என்பது இச்சமனின்மையின் தீர்வுக் கணமாகும். மெய்யெண் அச்சில் இந்த எண்களைத் தரும் புள்ளிகள் தீர்வுக் கணத்தின் விளக்கப்படமாகும்.

குறிப்பு : $A=\{x|2<x<5\}$ எனும் இடைவெளியைப் படத்தில் காட்டியுள்ளோம். இங்கு இரண்டு சமனின்மைத் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்கிறோம்.

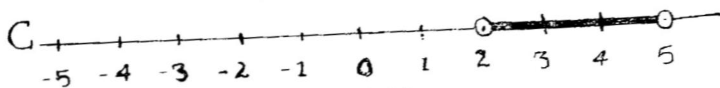
$P=\{x|2<x\}$ என்பது ஒரு தீர்வுக் கணம்.

$Q=\{x|x<5\}$ என்பது மற்றொன்று.

இடைவெளி $P\cap Q$ எனும் வெட்டுக் கணத்தால் தரப்படுகிறது.







படம் 36

A. P எனும் கணத்தின் படவிளக்கம்.

B Q எனும் கணத்தின் படவிளக்கம்.

C. $P\cap Q$ எனும் கணத்தின் படவிளக்கம்.

இதையே இடைவெளி A எனக் காட்டியுள்ளோம்.

(எ-டு.) : $\{x|x^2-x-2>0\}$ என்ற தீர்வுக் கணத்தைப் படத்தால் விளக்குக.

$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$$

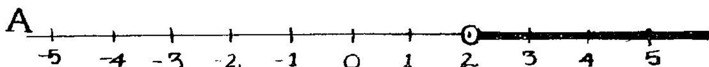
$\therefore \quad x^2-x-2>0$ என்ருல் $(x-2)>0, \quad (x+1)>0$

அல்லது $(x-2)<0, \quad (x+1)<0$

அதாவது $A=\{x \mid (x-2)>0\} \quad B=\{x \mid (x+1)>0\}$

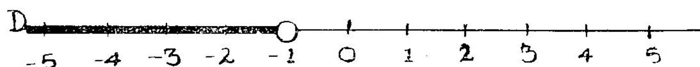
$C=\{x \mid (x-2)<0\} \quad D=\{x \mid (x+1)<0\}$

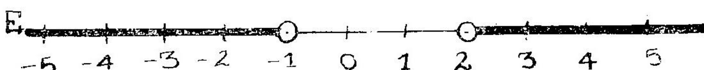
என்ருல் தீர்வுக்கணம் $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ ஆகும்.











படம் 37

தீர்வுக்கணம் : $(A \cap B) = A$ என்பது தெளிவாகிறது.

$(C \cap D) = D$ என்பதும் புலனுகிறது.

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $= A \cup D$

(எ-டு.) $\{x \mid (x-5)(x-2)<0\}$ என்ற சமனின்மைத் தீர்வுக் கணத்தைப் படத்தால் விளக்குக.

$P=\{x \mid (x-2)>0\} \qquad Q=\{x \mid (x-5)<0\}$

$R=\{x \mid (x-2)<0\} \qquad S=\{x \mid (x-5)>0\}$

தீர்வுக்கணம் $(P \cap Q) \cup (R \cap S)$

ஆனுல் $(R \cap S)=\varnothing$ என்பது புலனுகிறது.

$\therefore$ தீர்வுக்கணம் $(P \cap Q)$ எனும் இடைவெளி.

வரிசை எண் இணைக் கணம் (ordered number pair):

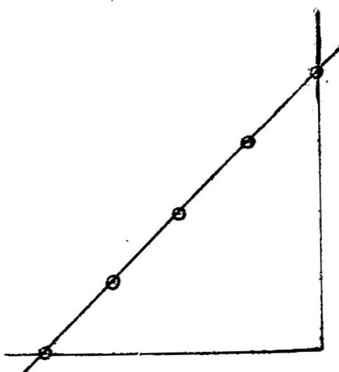
இதுவரை, கணத்தில் மூலம் ஏதேனும் ஒரு பொருள், அல்லது ஓர் எண் எனவுள்ள கணங்களைக் கூறினோம். மூலங்கள் எண் தொகுதியாகவும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, மூலம் ஒரு விதிக்குட்பட்ட எண் இணை (Number pair) யாக இருக்கலாம். இரண்டாவது எண் முதல் எண்ணின் சார்பலனாக அமையும். இத்தகைய எண்ணிணைகள் சேர்ந்த கணங்கள் சிலவற்றைப் பார்ப்போம்.

(எ- ௫.) $\{(x, y) | x+y=4\}$, $x \in N$, $y \in N$.

[N என்பது சாதாரண எண் கணம் (set of natural numbers)]

இந்தச் சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் = $\{(0,4), (1,3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ ஆகும்.

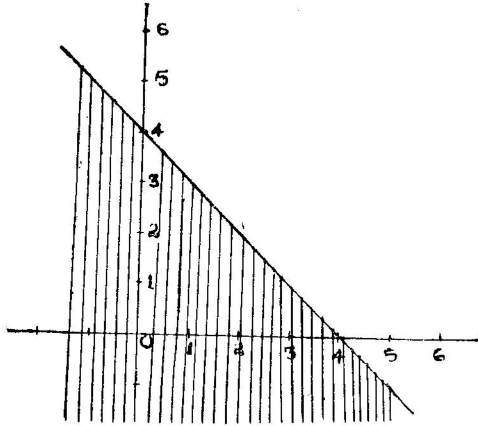
படத்தால் விளக்க, எண்ணிணைகளைக் கார்டீசியக் குத்துக் கூறுகளாக உள்ள புள்ளிகளாக் குறிக்கவும். இந்த ஐந்து புள்ளிகள் மேற்கூறிய கணத்தைக் காட்டுகின்றன.



படம் 38

(எ-டு.) $\{ (x, y) | x+y<4 \}$ $x \in R$; $y \in R$ எனும் தீர்வுக் கணத்தைப் படத்தால் விளக்கவும். மேற்கூறிய சமனின்மைக்குப் பொருத்தமான எண்ணிணைகள் யாவும் சேர்ந்து தீர்வுக் கணமாகும். $x+y=4$ எனும் சமன்பாடுடைய கோடு, தளத்தை இரு பாகமாகப் பிரிக்கிறது. ஒரு பாகம் $\{x | x+y>4\}$ என்ற தீர்வுக் கணத்தையும், மற்றது $\{x | x+y<4\}$ என்ற பாகத்தையும்

குறிக்கும். $\{(0,0)\}$ என்ற புள்ளியுள்ள பாகம் $\{x \mid x+y<4\}$ என்ற தீர்வுக் கணத்தைக் குறிக்கிறது. படத்தில் அது நிழ லிட்டு (shaded)க் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 39

(எ-டு.) $\{(x, y) \mid 3x-4y>0\}$ எனும் சமனின்மைத் தீர்வுக் கணத்தைப் படத்தால் காட்டவும்.

(i) $3x-4y=0$ எனும் சமன்பாட்டின் வரைபடம் வரைய வும். $(1, 1)$ எனும் இணையெண்கள் $3x-4y<0$ எனும்படியுள் ளது. ஆகவே இந்தப் புள்ளியில்லாக் கோட்டின் ஒரு பாகம் மேற்கூறிய தீர்வுக் கணத்தின் படவிளக்கமாகும்.

பயிற்சி

கீழ்வரும் சமனின்மைத் தீர்வுக் கணங்களைப் படங்களால் விளக்கவும்.

A. (i) $3x-4>0$ (ii) $2x+3<0$

(iii) $-2x-7>0$ (iv) $5x-4>0$

(v) $x^2-4x-5>0$ (vi) $x^2-3x-10<0$

(vii) $x^2-16<0$ (viii) $-x^2+2x+3>0$

(ix) $x^2+5x+4>0$ (x) $x^2-5x-6<0$

B. (i) $x-2y+7>0$ (ii) $2x-y+6<0$

(iii) $2x-5y<0$ (iv) $3x+4y>0$

C. (i) $0\leq x\leq 1$ (ii) $1<x\leq 3$

(iii) $-1<x<2$ (iv) $-1\leq x<2$.

சார்பலன்

(Function)

சார்பலனின் விளக்கம் : A என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் (element), ஒரு விதியின்படி B என்ற கணத்தில் குறிப்பாக ஒரு மூலத்தை இணைத்தால் அவ்வாறு இணைக்கும் விதி சார்பலன் எனப்படும். அத்தகைய இணைப்பை 'f' எனும் குறியீட்டால் குறிப்போம். $f: A \rightarrow B$ எனும் குறியீடு அவ்வாறு இணைப்பதைக் குறிக்கும். A ஐ Bஇல் புகுத்தும் சார்பலன் f எனப் படிக்கலாம். [f is a function of A into B]

f எனும் சார்பலனின் அரங்கம் (Domain) A எனப்படும்.

B எனும் கணம் f எனும் சார்பலனின் துணை அரங்கம் (co-domain) எனப்படும். Aஇன் ஒரு மூலம் a ஆனல், ($a \in A$) அதனுடன் இணைக்கப்பெறும் Bஇன் மூலம் a இன் பிரதியீடு (image) எனப்படும். a இன் பிரதியீட்டை $f(a)$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : **1.** மெய்யெண் கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்தையும் அதன் வர்கத்துடன் இணைத்தால் x எனும் மெய்யெண்ணின் பிரதியீடு $f(x) = x^2$ ஆகும்.

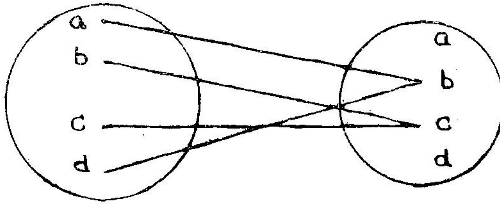
இங்கு அரங்கமும் துணை அரங்கமும் மெய்யெண் கணமாகும். $f: R \rightarrow R$ எனக் குறிக்கலாம்.

[அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்குமென துணை அரங்கத்தில் ஒரு பிரதியீடுள்ளது. பிரதியீடுகளேயன்றி வேறு மூலங்களும் துணை அரங்கத்தில் உள்ளன என்பதுவும் கவனிக்கத்தக்கது.]

(எ-டு 2.) : இந்தியாவிலுள்ள ஒவ்வொரு மாநிலத்திற்கும் தலைநகரைக் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு குறிப்பிடல் f எனும் சார்பலனுகும். அரங்கம் மாநிலங்களாகும். துணை அரங்கம் தலைநகர்களாகும். f (தமிழ்நாடு) = சென்னை என எழுதுகிருேம். f: மாநிலம் $\rightarrow$ தலைநகரம் என இணைப்பதைக் குறிக்கிருேம்.

(எ-டு 3.) : $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$. இணைப்பு விதியை அதாவது சார்பலனைக் கீழ்வருமாறு கூறுவோம். [illegible] = [illegible], $f(c) =$ [illegible], $f(d) = b$; இவ்வாறு எடுத்துக்

கூறும்போது b இன் பிரதியீடு c; அது c இன் பிரதியீடும் ஆகும். இதைப் படத்தால் காட்டலாம்.



படம் 40

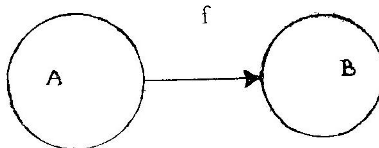
[அரங்கத்தில் உள்ள இரண்டு மூலங்களுக்குத் துணை அரங்கத்தில் ஒரே மூலம் பிரதியீடாக இருக்கலாம். ஆனால் அரங்கத்தில் உள்ள ஒரு மூலத்திற்கு, துணை அரங்கத்தில் இரண்டு மூலங்களைப் பிரதியீடுகளாக அமைப்பது சார்பலனாகாது.

சார்பலனை (1) சூத்திரமாகக் கூறலாம் [எ-டு. 1.]; (2) ஏதேனும் பிரியக்கூடிய விதியாகக் கூறலாம் [எ-டு.2]; (3) ஒவ்வொரு மூலத்தின் பிரதியீடுகளைத் தனித்தனியாக எடுத்துக் கூறலாம். [எ-டு. 3.]; படத்தால் இணைப்பைக் காட்டலாம். [எ-டு. 3].

மாற்றம் (Mapping or transformation) :

A எனும் கணம் அரங்கம். B எனும் கணம் துணை அரங்கம். அரங்க மூலங்கள் எண்களாக இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை. அப்போது Aஇன் மூலங்களை Bஇல் உள்ள அவற்றின் பிரதியீட்டுக்களுடன் இணைப்பதை, அதாவது சார்பலன் fஐ A ஐ Bஆக மாற்றுவது (mapping of A into B) எனப்படும். $f: A \rightarrow B$ எனக் குறியீட்டில் கூறப்படும். 'f, Aஐ Bஆக மாற்றுகிறது' என இதைப் படிக்கலாம்.

$A \xrightarrow{f} B$ என்பது மற்றொரு குறியீடாகும். பட விளக்கத்தில்



படம் 41

(diagrammatic representation) எனக் காட்டப்படும்.

சமச் சார்பலன் (Equal functions) :

'f', 'g' எனும் சார்பலன்கள் ஒரே அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் சமப்பிரதியீட்டைத் தந்தால், அதாவது $a \in D$; $f(a)=g(a)$ எனும்படி இருந்தால் இரண்டு சார்பலன்களும் சமச் சார்பலன்கள் எனப்படும்.

(எ-டு.) f எனும் சார்பலனின் விளக்கம்

$$f: R \to R; \quad x \in R, f(x)=x^2$$
$$g: R \to R \quad y \in R, g(y)=y^2$$

இங்கு $f=g$.

சார்பலனின் வீச்சு (Range of a function) :

$f: A \to B$ என்ற மாற்றத்தில் B என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலமும் A என்ற கணத்தில் உள்ள மூலங்களின் பிரதியீடாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை. ஆனால் Aஇல் உள்ள மூலங்களின் பிரதியீடுகளாகவுள்ள B இன் மூலங்கள் சேர்ந்த கணம், f எனும் சார்பலனின் வீச்சு (Range) எனப்படும். இந்தக் கணத்தை $f(A)$ என்று குறிப்போம்.

(எ-டு.) $f(x)=x^2$ எனும் சார்பலன் $f: R \to R$ ஆக மாற்றினால், R எனும் மெய்யெண் கணத்தில் உள்ள பூச்சியமும் மற்றுள்ள நேரெண்களும் (Positive real numbers) சார்பலனின் வீச்சு ஆகும்.

ஒன்றுக்கு ஒன்றேயெனும் சார்பலன் (one one function) :

$f: A \to B$ எனும் மாற்றத்தில் Aஇல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் Bஇல் தனித்தனியான பிரதியீடுகள் உளவாயின், அத்தகைய மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்றே எனும் மாற்றம் எனவும் இதைத்தரும் விதி ஒன்றுக்கொன்றே எனும் சார்பலன் எனவும் பெயர் பெறும்.

(எ-டு.) $f(x)=x^2$ எனும் சார்பலன் $f: R \to R$ எனும் மாற்றம் ஒன்றுக்கு ஒன்றே எனும் மாற்றம் அல்ல. ஏனெனில் $f(2)=4$, $f(-2)=4$. 4 என்பது 2, -2 எனும் இரண்டு எண்களின் பிரதியீடாகும். இது பல ஒன்று (many one mapping) மாற்றமாகும். ஆனால் R எனும் கணம் நேர் மெய்யெண்களை மட்டும் கொண்டதாயின், ஒன்றுக்கு ஒன்றே எனும் மாற்றமாகும்.

குறிப்பு : $f: A \to B$ என்பது ஒன்றற்கொன்றே (one-one) எனும் மாற்றம் என்றால் $f(a) = f(a')$. $a, a', \in A$ என்பது $a=a'$ என்பதைத் தரும்.

$a \neq a'$ ஆனால் $f(a) \neq f(a')$ என்பதுவும் தெளிவாகும்.

துணை அரங்க மேல் மாற்றம் அல்லது மேல் மாற்றம் (on to mapping) :

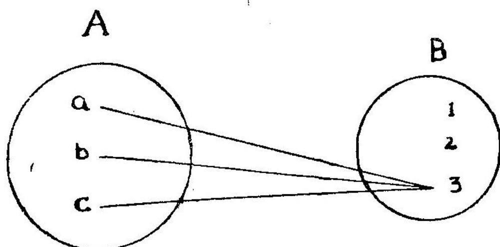
$f: A \to B$ எனும் மாற்றத்தின் வீச்சு. $f(A)$ என்பது பொதுவாக B எனும் கணத்தின் உட்கணமாகும். அதாவது $f(A) \subset B$ $f(A) = B$ எனும்படியுள்ள மாற்றம் மேல் மாற்றம் (on to mapping) எனப்படும். Bஇல் ஒவ்வொரு மூலமும் Aஇல் உள்ள ஏதாவது ஒரு மூலத்தின் பிரதியீடாகும்.

(எ-டு 1) $f(x)=x^2$ என்ற விதி $f: R \to R$ [R என்பது மெய்யெண் கணம்]. இது மேல் மாற்றம் ஆகாது. துணை அரங்கம் R என்பது எல்லா மெய்யெண்களும் கொண்டவை. ஆனால் fஇன் வீச்சு நேரெண்கள் மட்டுமாகும். ஆனால் R எனும் கணம் நேரெண்களாக மட்டும் கொண்டால், மாற்றம், மேல் மாற்றமாகும். [ஏற்கெனவே இது ஒன்றற்கொன்றே (one-one எனும் மாற்றம் எனக் காட்டியுள்ளோம்].

(எ-டு. 2) $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{x, y, z\}$

$f: A \to B$ என்பது $f(a)=y$; $f(b)=x$; $f(c)=z$; $f(d)=y$ எனத் தரப்பட்டால் மேல் மாற்றம் ஆகிறது. ஆனால் இது ஒன்றற்கொன்றே எனும் மாற்றம் ஆகாது. ஏனெனில் $a \neq d$ ஆனால் $f(a)=f(d)=y$ என்பதால்.

நிலை மாற்றம் : $f: A \to B$ எனும் மாற்றத்தில் Aஇன் ஒவ்



படம் 42

வொரு மூலத்தின் பிரதியீடும் Bஇல் உள்ள ஒரே மூலம் என்றால் அத்தகைய மாற்றம் நிலை மாற்றம் (constant function) எனப் படும். முன் பக்கத்தில் படத்தில் காட்டிய மாற்றம் நிலைமாற்றத் திற்கு எடுத்துக்காட்டாகும்.

முற்றொருமை மாற்றம் (Identity mapping) :

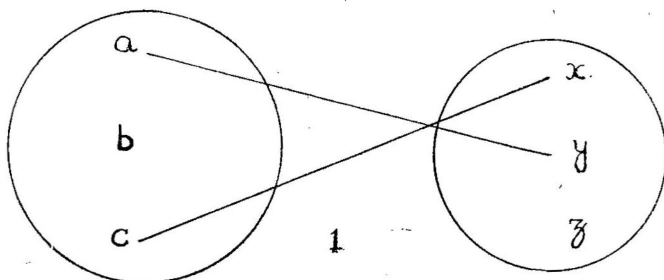
A என்பது ஒரு கணமாகுக. $f: A \to A$ என்ற மாற்றத்தின் விதி $x \in A$, $f(x)=x$ ஆகுக. இத்தகைய மாற்றம், முற்றொருமை மாற்றம் எனப்படும். இதைத் தரும் விதி 'f' முற்றொருமைச் சார்பலன் எனப்படும்.

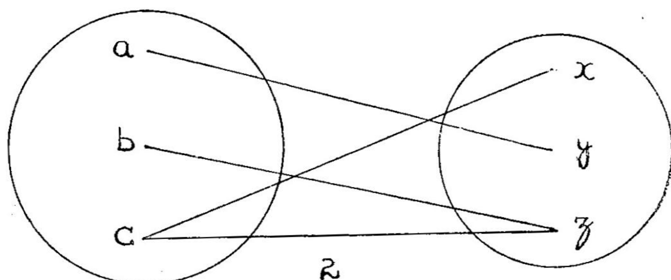
பயிற்சி

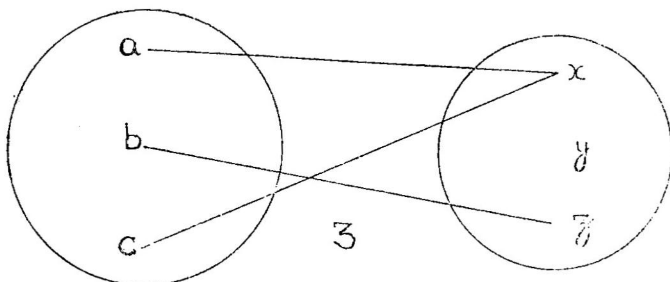
1. $-2 \leq x \leq 8$ எனும் முற்றுப்பெறும் இடைவெளியும் உள்ள எண் கணத்தின் மாற்றம், $f(x)=x^2$ என்ற விதியால் தரப்படுகிறது என்றால் (i) $f(3)$, (ii) $f(-5)$, (iii) $f(t-2)$ என்ன?

[விடை : (i) $f(3)=9$ (ii) $f(-5)$ என்பது இல்லை ஏனெனில் -5 அரங்கத்தின் மூலமல்ல. $f(t-2)^2 = t^2-4t+4$. ஆனால் $-2 \leq t-2 \leq 8$ எனும் சமனின்மைக்கு மட்டுமே இம் மாற்றம் பொருந்தும். அதாவது $0 \leq t \leq 10$ என்ற எண்களுக்கு மட்டுமே பொருந்தும்].

2. கீழ்வரும் படங்களால் விளக்கப்படும் மாற்றம் சார் பலன் வரையறைக்கு உட்பட்டதா எனக் கூறுக.







படம் 43

[விடை : (1)உம் (2)உம் சார்பலன் அல்ல. (3) மட்டுமே சார்பலன் ஏன்? 1இல் அரங்கத்தில் உள்ள b எனும் மூலத்தின் பிரதியீடு தரப்படவில்லை. அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலத்திற்கும் துணை அரங்கத்தில் ஒரு பிரதியீடு மட்டுமே தரப் படவேண்டும். 2இல் c க்கு x, z என இரு பிரதியீடுகள் தரப்பட் டுள்ளதால் அதுவும் சார்பலன் மாற்றமாகாது].

3. $f: R \rightarrow R$ என்ற மாற்றத்தின் விதி

x விகிதமுறு எண்ணுனல் $f(x)=1$

x விகிதமுரு எண்ணுனல் $f(x)=-1$

[R என்பது மெய்யெண் கணம்]

(i) $f(\frac{3}{2})$ (ii) $f(\sqrt{2})$ (iii) $f(2{\cdot}56)$ (iv) $f(2.1313\ldots)$— இவற்றின் மதிப்புக் காண்க.

[விடை $f(\frac{3}{2}) = f(2{\cdot}56) = f(2{\cdot}1313\ldots)=1$; $f(\sqrt{2})=-1$]

4. $f: R \rightarrow R$ என்ற மாற்றத்தின்

விதி $f(x)= \begin{cases} 3x-1 & x>3 \text{ என்ருல்} \\ x^2-2 & -2 \leq x \leq 3 \text{ என்ருல்} \\ 2x+3 & x<-2 \text{ என்ருல்} \end{cases}$

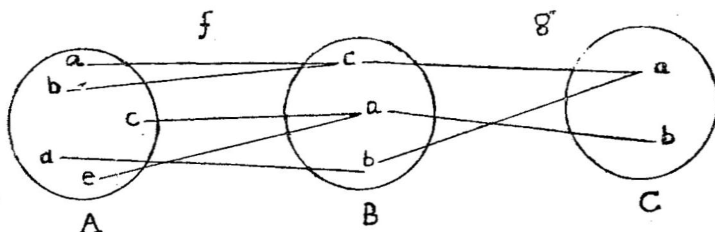
இந்த மாற்றத்தில் (i) $f(2)$ (ii) $f(4)$ (iii) $f(-1)$ (iv) $f(-3)$ இவைகளைக் காண்க.

[விடை (i) 2 (ii) 11 (iii) −1 (iv) −3]

5. $A=\{a, b, c\}$; $B=\{2, 5\}$ Aஇலிருந்து Bஆக மாற்றும் சார்பலன்கள் எத்தனை வகையுள்ளன? அவைகளைப் பட்டியலாகவோ, படவிளக்கமாகவோ கூறுக:

[விடை: 8 விதங்கள். (i) $f(a)=f(b)=f(c)=2$ (ii) $f(a)=f(b)=2$; $f(c)=5$ (இதுபோன்று இன்னும் இரண்டு (v) $f(a)=f(b)=5$; $f(c)=2$ இது போன்று இன்னும் இரண்டு.) (viii) $f(a)=f(b)=f(c)=5$]

6. இந்தப்படத்தில் காட்டியுள்ள சார்பலன்களில் $f(a)$,



படம் 44

$f(b)$, $f(d)$, $f(e)$—இவற்றின் மதிப்புக்கள் என்ன?

7. $g(c)$, $g(a)$, $g(b)$—இவற்றின் மதிப்புக்கள் என்ன ?

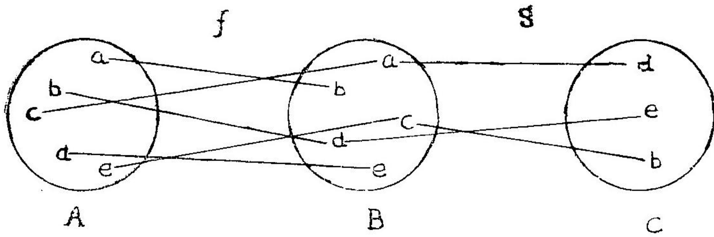
8. கீழ்வருபனவற்றுக்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுக்கள் தருக.

a) மேல் மாற்றமல்லாத ஒன்றற்கொன்றேயெனும் மாற்றம்.

b) மேல் மாற்றமும், ஒன்றற்கொன்றேயெனும் மாற்றமும் ஒருங்கே கொண்டது.

9. $f(x) = x^2$ எனும் விதிப்படி அமையும் மாற்றம் ஒன்றற் கொன்றே எனும்படி அமையவுள்ள மிகப்பெரிய அரங்கத்தைக் கூறுக.

[விடை $\{0, -\infty\}$ அல்லது $\{-\infty, 7\}$] எனும் இடைவெளியில் உள்ள மெய்யெண் கணம்].



படம் 45

10. மேல்காட்டியுள்ள படத்தில் இரண்டு சார்பலனல் உள்ள மாற்றம் காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i) ஒன்றற்கொன்றே எனும் மாற்றம் எது ?

(ii) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $f(e)$ இவற்றின் மதிப்புக்களை எழுதுக.

(iii) $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$, $g(d)$, $g(e)$ எனும் மதிப்புக்களை எழுதுக.

(vi) மேல் மாற்றம் எது ?

11. x இன் அரங்கம் $\{0, 1\}$. கீழ்வருபனவற்றுள் எவை சமச் சார்பலன்? ஏன்?

(i) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$

(ii) $f(x) = x+1$; $g(x) = 3x^2-2x+1$

(iii) $f(x) = 2$ $g(x) = x - x+2$

(iv) $f(x) = 3x$ $g(x) = 2x+1$

12. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $g(x) = (x+1)$. x இன் அரங்கம் $X = \{1, 2, 3, 4\}$. இரண்டு சார்பலன்களின் வீச்சுக் கணங்களை எழுதுக.

கலைச் சொற்கள்

Domain	—	அரங்கம்
,, co	—	துணை அரங்கம்
Function	—	சார்பலன்
Intervel	—	இடைவெளி
Mapping	—	மாற்றம்
,, constant	—	,, நிலை
,, identity	—	,, முற்றொருமை
,, on to	—	,, மேல்
,, one—one	—	,, ஒன்றற்கொன்றே எனும்
Range	—	வீச்சு
Set	—	கணம்
,, comparable	—	,, ஒப்பிடு
,, complement	—	,, நிரப்பு
,, element of	—	கண மூலம்
,, intersection of	—	கண வெட்டு
,, null	—	பூச்சியக் கணம்
,, power	—	அடுக்குக் கணம்
,, sub	—	உட் கணம்
,, super	—	பெருங் கணம்
,, union of	—	கணக் கூடுதல்
,, universal	—	அகில கணம்
Solution set of inequalities	—	சமனின்மைத் தீர்வுக்கணம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், சென்னை.

1971 ஜூலை வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	50
*1-A	,, II	...	,,	...	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	...	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	,,	...	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	...	சோணசலம்	...	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	...	மு. ஆரோக்கியசாமி	...	6	00
6.	புதுமைப் பொருளர்தாரக் கூறுகள்	...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	...	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	தி. சி. மோகன்	...	12	00
8.	,, II	...	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	...	10	5
*9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	...	7	00
10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	75
*11.	,, II	...	,,	...	11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	...	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	...	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	...	4	75

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
*16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வுநூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00

No.	Title		Author		Rs.	P.
39.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	...	க. வெற்றிவேல்	...	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	...	மா. குமாரசாமி	...	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	...	சி. சுந்தரராஜன்	...	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	...	எம் கே. சுப்பிரமணியம்	...	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	...	ம. திருநாவுக்கரசு	...	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	...	பு. வி. சீனிவாசன்	...	6	25

வரலாறு

No.	Title		Author		Rs.	P.
*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	4	50
*46.	,, II	...	,,	...	3	50
*47.	,, III	...	,,	...	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி. பி. 395–1500)	...	டி. வி. சொக்கப்பா	...	3	75
*49.	ஐரோப்பிய வரலாறு—II (கி.பி. 1500 முதல்)	...	என். ஜே. இராஜகோபால்	...	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	...	வை. விருத்தகிரீசன்	...	15	00
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	...	இரா. அண்ணுமலை	...	13	00
52.	,, II	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	13	00
53.	,, III	...	என். ஜே. ராஜகோபால்	...	8	00
54.	,, IV	...	,,	...	8	00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	...	15	00
56.	,, II	...	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	...	8	00
57.	,, III	...	,,	...	5	00

*மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரூ.	காசு
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	...	தி. வெ. குப்புசாமி	...	5	50
59.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	...	6	00
60.	,, III	...	அ. பாண்டுரங்கன்	...	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	...	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	...	7	50
62.	,, II	...	,,	...	7	00
63.	,, III	...	பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	...	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	...	தி. வெ. குப்புசாமி	...	8	25
65.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்,	...	7	50
66.	,, III	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	...	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் எம். எக்ஸ். மிராண்டா	...	7	50
68.	,, II	...	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	...	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	...	வை. விருத்தகிரீசன்	...	7	50
70.	,, II	...	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	...	6	75
71.	,, III	...	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	...	6	50
72.	,, IV	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	7	00
73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்		6	50
74.	,, II	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	...	6	75
75.	,, III	...	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	...	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	5	00
77.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	...	6	00

அரசியல்

No.	Title	Author	Rs.	P.
*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	,, II	,,	13	25
85.	பொதுதுறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, ,, —II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, ,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
92.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. இராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00

*மூலநூல் (Original Book)

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்		ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	பா. சூரியநாராயணன் ...	5	75
97.	,, II	...	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
93.	,, III	...	கி. ர. அனுமந்தன் ...	5	75

உளவியல்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
99.	குழந்தை உளவியல்—I	...	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி ...	8	00
100.	,, II	...	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி ...	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	...	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன் ...	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	...	தி. இரா. அரங்கராசன் ...	12	00
103.	,, II	...	தி. இரா. அரங்கராசன் ...	9	00
104.	சமூக உளவியல்	...	என். வேதமணி மானுவேல் ...	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	...	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர் ராஜ் ...	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	...	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர் ராஜ் ...	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	...	டாக்டர் மு. அறம் ...	6	25
*108.	உள நலவியல்	...	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம் ...	6	00

தத்துவம்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	...	ஞா. ராஜாபகதூர் ...	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	...	ஆர். இராமானுஜாச்சாரி ...	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	...	ஆர். எஸ். தேசிகன் ...	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	...	கோ. மோ. காந்தி ...	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு ...	5	50
114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	...	வ. ஆ. தேவசேனாதிபதி, ப. நா. சண்முகசுந்தரம் ...	3	50

115. இந்தியத் தத்துவம்—II ... வ. ஆ. தேவசேனாதிபதி, ப. நா. சண்முகசுந்தரம் ... 6 00

116. மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம் ... சி. இராமலிங்கம் ... 6 00

அறவியல்

117. அறவியல்—ஓர் அறிமுகம் ... கோ. மோ. காந்தி ... 8 50

அளவையியல்

118. அளவை இயல்—தொடக்க நூல் ... கி. ர. அப்புள்வாச்சாரி ... 2 50

மானிடவியல்

*119. மானிடவியல் ... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன் ... 4 75
120. பண்பாட்டுக் கோலங்கள் ... கி. பூ. சுப்பிரமணியன் ... 5 50
121. இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை ... எஸ். இலட்சுமி ... 3 50

சமூகவியல்

122. சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் ... ஜெ. நாராயணன் ... 10 50

புவியியல்

*123. ஆசியா—I ... கொ. சேஷ. நரசிம்மன் ... 9 50
*124. ,, II ... கொ. சேஷ. நரசிம்மன் ... 8 75
*125. ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல் ... எ. எஸ். நாராயணன் ... 8 50
*126. தென்கிழக்கு ஆசியா ... ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி ... 8 50

*மூலநூல் (Original Book)

புவியியல்—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரு.	காசு
*127.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலுமேலு	...	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	...	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	...	3	00
*130.	தென் கண்டங்கள்—ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	...	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	...	6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	...	5	50
*133.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	...	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	...	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	10	00
136.	,, II	...	,,	...	5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	...	திருமதி இராதா	...	9	50
*138.	,, II	...	,,	...	8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	...	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விசுவநாதன்	...	4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசுவாமி	...	6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம்	...	9	50
143.	,, II	...	ம. கார்த்திகேயன்	...	12	00
144.	,, III	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	5	75

புள்ளியியல்

எண்	நூல்		ஆசிரியர்		ரு.	காசு
*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	...	சு. வைத்தியநாதன்	...	10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	...	கோ. சண்முகசுந்தரம்	...	10	00
147.	,, II	...	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	...	14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	...	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	...	6	50

உயர் கணிதம்

*149. ஆயத்தொலை வடிவகணிதம் ... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை ... 4 25
*150. வகை நுண்கணிதம் ... ,, ... 3 00
*151. தொகை நுண்கணிதம் ... தி. கோவிந்தராசன் ... 3 25

விலங்கியல்

*152. விலங்கியல் ... பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன் ... 12 00

பௌதிகவியல்

*153. ஒளி நூல் ... ச. சம்பத்து ... 10 00

விஞ்ஞானம்

*154. வானவெளி வெற்றி ... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ் ... 6 00
*155. ரேடியோ ... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம் ... 4 75
*156. எக்ஸ்-கதிர்கள் ... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம் 4 50
*157. பாம்புகள் ... பெ. மா. அண்ணாமலை ... 3 50
*158. தாவரம்-வாழ்வும் வரலாறும்—I ... டாக்டர் கு. சீனிவாசன் ... 8 00
*159. கரும்பு ... ,, ... 4 00
*160. தாவரங்களின் வாழ்வியல் ... எஸ். சுந்தரம் ... 6 50

மருத்துவம்

*161. நீரிழிவு—க்ஷயரோகம் ... டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன் ... 2 50

*மூலநூல் (Original Book)

மருத்துவம்—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
162.	மகப்பேறும் மாதாநோயும்	டாக்டர் (குமாரி) ந. மணிமேகலை	8	25
*163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ் ஆர். சேது	6	75
166.	II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25

பொறியியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், கே. வேணுகோபால் ஆர். இராமசுவாமி	8	50

கூட்டுறவு

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
*170.	குற்றவியல் சட்டம்	மா. சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00

No.	Title		Author		Rs.	P.
173.	சேமக் கை-நூல்	...	ஆ. சுப்பிரமணியன்		2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	...	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	...	9	00
*175.	உணவும் ஊட்டமும்	...	தி. வேங்கடகிருஷ்ண அய்யங்கார்	...	4	50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	...	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	...	6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

No.	Title		Author		Rs.	P.
*177.	உலக வரலாறு	...	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	...	4	00
*178.	பொருளாதாரம்	...	ஜி. சிதம்பரம்	..	2	75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	கு. ஆளுடையபிள்ளை	...	2	50
*180.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—II	...	கு. ஆளுடையபிள்ளை	...	2	25
*181.	பௌதிகம்	...	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	...	7	50
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	...	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	6	00
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	...	எஸ். சம்பத்	...	7	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	...	கே. இராஜகோபாலன்	...	7	00
*185.	,, II	...	,,	...	3	00
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	...	டி. கோவிந்தராசன், முத்துசாமி	...	7	00
*187.	,, II	...	,,	...	4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	ஆர். மகாதேவன்	...	4	75
*189.	,, II	...	,,	...	3	25
*190.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி		7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	...	5	50
*192.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	...	4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	...	பெ. மா. அண்ணுமலை	...	7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம்	...	4	00

* மூல நூல் (Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி. எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள்—கழிவு இல்லை)

பௌதிகம்			ரூ.	காசு
*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஆர். நாகராசன்	6	25
*196.	,, II	,,	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி	4	50
*199.	II	,,	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I	பி. தங்கராசன்	4	00
*201.	,, II	,,	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50
*203.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*204.	,, II	,,	4	50
*205.	,, III	,,	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி II) (முதல் புத்தகம்)	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	6	00
*208.	,, (பகுதி II) (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	4	50

*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம்	4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. முருகையன்	5	00

வேதியியல்

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. சக்திவேலு	4	00
*215.	,, II	,,	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் I	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*218.	,, II	,,	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*221.	,, II	,,	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்-சிறப்புப்பாடம்	என். ஆறுமுகம்	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	பி.எல். இராமசாமி	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்—I	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-I (இரண்டாம் புத்தகம்)	கி. கண்ணபிரான்	4	75
*226.	,, I (மூன்றாம் புத்தகம்)	,,	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-II (முதல் புத்தகம்)	,,	5	75
*228.	,, II (இரண்டாம் புத்தகம்)	,,	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

கணிதம்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப்பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்ரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்-சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம் துணைப் பாடம்—பகுதி—2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்-(முதல் புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	5	50
*240.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—(இரண்டாம் புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*243.	முதுகெலும்பற்றவை-1—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். முருகேசன்	6	00
*244.	முதுகெலும்பற்றவை-2—சிறப்புப் பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை_1—சிறப்புப் பாடம்	திருமதி ராணி கந்தசாமி	5	00
*246.	முதுகுநாணுள்ளவை-2—சிறப்புப் பாடம்	,,	9	75
*247.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை-2—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்-சிறப்புப்பாடம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*250.	முதுகு நாணுள்ளவை—துணைப்பாடம்	வி. சேது	6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம்	என். இராமலிங்கம்	5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	பெ. மா. அண்ணுமலை	5	25
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற் செயலியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	4	75
*254.	,, II	,,	6	50
*255.	பரிணாமம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	6	25

தாவரவியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*256.	தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப்பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50

*மூலநூல் (Original Book)

தாவரவியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மருஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோஃபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்) சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

*மூலநூல் (Original Book)

